ҒТАХР 27.21.17

Ж.Т. Қайыңбаев[1], Қ. Удербаева[2]
[1,2]Сулейман Демирел атындағы Университет, Қаскелең қ., Қазақстан

ТЕҢ БҮЙІРЛІ ЖӘНЕ ТІК БҰРЫШТЫ ҮШБҰРЫШТАРҒА ІШТЕЙ ЖӘНЕ СЫРТТАЙ СЫЗЫЛҒАН ШЕҢБЕРЛЕРГЕ БАЙЛАНЫСТЫ КҮРДЕЛІ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУ ТӘСІЛДЕРІ

Андатпа. Жалпы геометриялық есептердің жартысы үшбұрыштарға байланысты болып келеді. Ал, сол есептер негізінен үш топқа бөлініп қарастырылады. Біріншісі, жалпы үшбұрыштарға байланысты есептер. Екіншісі, теңбүйірлі үшбұрыштарға байланысты есептер және үшіншісі тікбұрышты үшбұрыштарға байланысты есептер. Мақалада тең бүйірлі және тік бұрышты үшбұрыштардың биссектрисалары мен медианаларының әр түрлі комбинациялары негізінде шығарылатын әр түрлі мағынадағы күрделі есептерді шығару тәсілдері қарастырылған. Мақала, бүгінгі және болашақ математика пәндері мұғалімдеріне арналған.

Түйін сөздер: есеп, тең бүйірлі үшбұрыштар мен олардың қасиеттері, тік бұрышты үшбұрыштар мен олардың қасиеттері, биссектрисалар, медианалар, тең бүйірлі және тік бұрышты үшбұрыштарға іштей және сырттай шеңбер сызу.

***

Аннотация. Половина общих геометрических задач связана с треугольниками. Эти задачи рассматриваются в основном в трех группах. Первая группа – это задачи, связанные с произвольными треугольниками. Вторая группа – задачи, связанные с равнобедренными треугольниками, и третья – задачи, связанные с прямоугольными треугольниками. В статье рассмотрены способы решения сложных задач различного значения, которые решаются на основе различных комбинаций биссектрис и медиан равнобедренных и прямоугольных треугольников. Статья, посвящена сегодняшним и будущим учителям математики.

Ключевые слова: задачи, равнобедренные треугольники и их свойства, прямоугольные треугольники и их свойства, биссектрисы, медианы, описанные и вписанные окружности около равнобедренных и прямоугольных треугольников.

***

Abstract. Half of the geometric problems are related to triangles. And these tasks are mainly considered in three groups. The first is problems related to scalene triangles. The second is problems related to isosceles triangles, and the third is problems related to right triangles. The article considers the methods of solving complex problems, which are solved by combinations of bisectors and medians of isosceles and right triangles. The article is dedicated to today's and future teachers of mathematics.

Keywords: tasks, isosceles triangles and their properties, right triangles and their properties, bisectors, medians, circumscribed and inscribed circles of isosceles and right triangles.

Жалпы, математикалық пәндерді (Арифметика (I-VI сыныптардағы пән атауы «Математика» деп аталғанымен негізінен арифметикалық материалдарды қарастырады), Алгебра, Алгебра және анализ бастамалары, Геометрия, Математикалық сауаттылық (Бұл күндері, біздің жалпы білім беретін орта мектебімізге дәл осындай атаумен бір пән енгізу керек-ақ) оқытудың әдістемесі басқа пәндерді оқытудың әдістемесіне қарағанда өзгеше болып келеді. Атап айтқанда, проблеманы шешуге бағытталған (проблемно-орентированное обучение) оқыту деп аталатын оқыту әдістемесі тарих, әдебиет және т.б пәндерді оқыту барысында бірде қолданылар, ал бірде қолданылмас, ал оқытудың бұл жүйесі математиканы оқыту барысында үнемі, ылғи, тұрақты түрде қолданылады [1].

Проблеманы шешуге бағытталған (проблемно-орентированное обучение) оқыту әдістемесінің басты қағидаларын математиканы оқыту тұрғысынан талдасақ, олар мыналар [2]:

1. Проблеманың қойылуы;
2. Проблеманы шешу үшін проблеманы қойып отырған маман, проблеманы қандай мәліметтердің көмегімен шеш дейді. Соны түсінуге тырысу. Яғни, есептегі әрбір берілген мәліметке назар аударып, оның неге берілгендігін түсінуге тырысу;
3. Проблеманы шешуге қажетті берілген мәліметтердің көмегімен нені және қалай табуға болатындығын анықтау;
4. Проблеманы шешудің алғашқы жоспарын дайындау;
5. Проблеманы шешуге тырысу;
6. Әсіресе, күрделі есептер анықталған бірінші жоспармен шешіліп кетпейді. Демек, көп жағдайда есепті шешудің жоспарын қайта құру қажеттілігі туындайды.Оған білім алушы дайын болу керек;
7. Шешілген проблеманы немесе шешілген есептің шешілу тәсілін жалпылау. Немесе, «Мынандай жағдайда, есепті мына тәсілмен шешуге болады екен» деген болашақ үшін қорытынды жасау.

Жалпылама айтылған бұл мәселелер, күрделі геометриялық есептерді шешу барысында былай жүйеленеді [3]:

1. Есеп мазмұнында айтылған фигураның немесе фигуралардың анықтамасын, барлық қасиеттерін еске түсіру;

2. Есеп мазмұнында айтылған фигураның немесе фигуралардың қасиеттерін сипаттайтын формулаларды еске түсіру;

3. Нені және неге дәл осыны іздеу керектігін анықтау, ең болмаса жорамалдау;

4. Есеп мазмұнында айтылған әрбір мәлімет жайлы ойлану. Ол мәліметтің неге берілгендігін анықтау, ең болмаса жорамалдау;

5. Есеп мазмұнында айтылған әрбір мәлімет пен есеп талабында айтылған ізделінуге, табылуға тиісті мәліметтің немесе мәліметтердің арасындағы байланысты анықтау, ең болмаса жорамалдау;

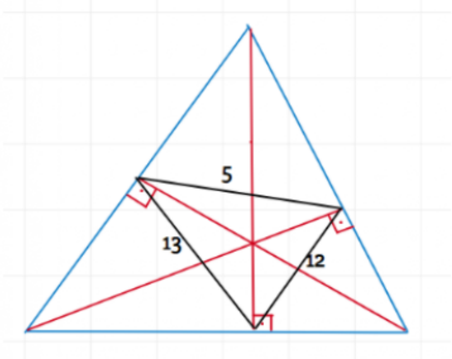
6. Көптеген күрделі геометриялық есептерде берілген мәліметтер аз немесе өте аз болады. Сондықтан бұл жағдайларда ізделінетін шамаларды бірдей айнымалы арқылы өрнектеуге күш салу керек. Олар болашақта қысқарып кетеді деген нақты есеп, ең болмаса жорамал болу керек.

7. Күрделі геометриялық есептер геометриялық проблемаларды шешуге арналғанмен, ол проблемаларды шешу үшін алгебралық аппарат қолданылады. Мұнда, әсіресе тригонометрия өте маңызды роль атқарады. Себебі, тригонометрия алгебраның құрамында қарастырылғанымен, ол үшбұрыштың бұрыштары жайлы теория. Ал, бұрыш геометрияның ең басты ұғымдарының бірі.

Жалпы геометриялық есептердің жартысы үшбұрыштарға байланысты болып келеді. Ал, сол есептер негізінен үш топқа бөлініп қарастырылады. Біріншісі, жалпы үшбұрыштарға байланысты есептер. Екіншісі, тең бүйірлі үшбұрыштарға байланысты есептер және үшіншісі тік бұрышты үшбұрыштарға байланысты есептер. *Төменде біз,* тең бүйірлі үшбұрыштар мен шеңберлердің комбинакциясына байланысты есептерді және тік бұрышты үшбұрыштар мен шеңберлердің комбинакциясына байланысты есептерді жоғарыдағы келтірілген жүйе бойынша қарастырмақшымыз [4].

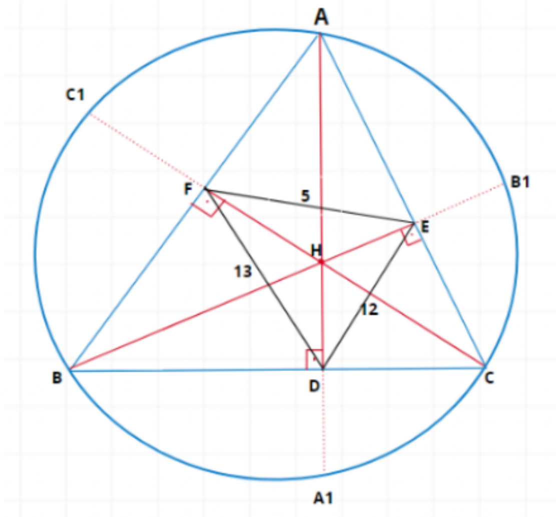
1-мысал: Сүйірбұрышты үшбұрыштың биіктіктерінің табанын қосатын кесінділердің ұзындықтары 5, 12 және 13-ке тең. Үшбұрыштың ауданын табыңыз [5].

Берілгені:



S = ?

Шешімі: ABC үшбұрышының биіктіктерінің жалғасы болатын A_1, B_1 және C_1 нүктелері ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің бойында жатыр.
H – биіктіктердің қиылысу нүктесі



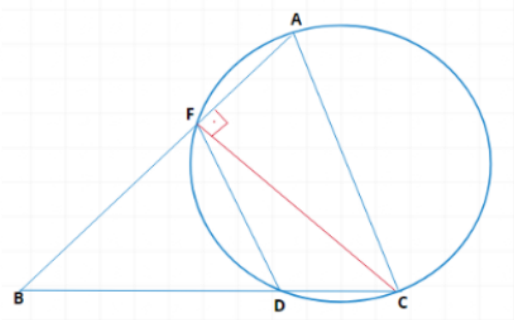
ABC үшб-да $< BAC = \alpha, < ABC = \beta, < ACB = \gamma$

және AB = c, BC = a, AC = b болсын

1-амал: $< FED -$ тікбұрышты үшбұрыш, себебі

$5^2 + 12^2 = 13^2$

2-амал: AFC тікбұрышты үшбұрышына сырттай шеңбер сызамыз:



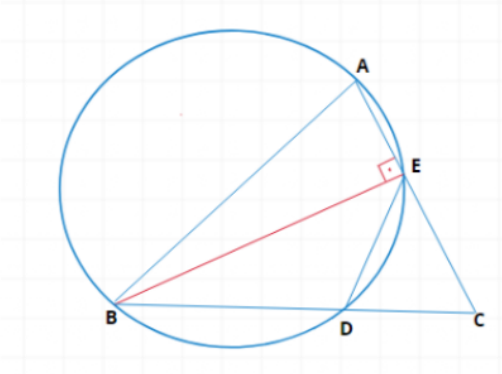
FC – хорда, демек $\alpha + < FDC = 180°$

$< FDC = 180° - \alpha$,

демек $< FDB = \alpha$

$\Delta BFD \sim \Delta BCA$

3 – амал: ABE тікбұрышты үшбұрышына сырттай шеңбер сызамыз:



BE – хорда, демек $\alpha + < BDE = 180°$

$< BDE = 180° - \alpha$,

демек $< CDE = \alpha$

$\Delta BCA \sim \Delta ECD$

4 – амал: FECB төртбұрышына сырттай шеңбер сызамыз:

FC – хорда, демек $\beta + < FEC = 180°$

$$< FEC = 180° - \beta, \qquad \text{демек} \ < FEA = \beta$$

$$\Delta BCA \sim \Delta EFA$$

5 – амал: ΔABC синустар теоремасы бойынша: $\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2R$

$a = 2Rsin\alpha \quad b = 2Rsin\beta \quad c = 2Rsin\gamma$

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4R} = \frac{2Rsin\alpha 2Rsin\beta 2Rsin\gamma}{4R}$$

$S_{ABC} = 2R^2 sin\alpha sin\beta sin\gamma \quad (1)$

6 – амал: Биіктік қасиеті бойынша – үшбұрыштың қабырғасы бойынша ортоцентрге симметрия болатын нүкте, осы үшбұрыша сырттай сызылған шеңбердің бойында жатады және керісінше.

D_1 нүктесі H нүктесіне қатысты симметрия нүкте және шеңбер бойында жатыр, демек

$$HD = DA_1, HE = EB_1, HF = FC_1$$

$HD = DA_1$ және $HE = EB_1$болғандықтан, DE кесіндісі ΔHB_1D_1- ның орта сызығы,

$$DE = 12 \ A_1B_1 = 24$$

Дәл осылай, $A_1C_1 = 26, \quad B_1C_1 = 10 \ (2)$

7 – амал: $\Delta FDE \sim \Delta C_1D_1B_1$, $\frac{\Delta FDE}{\Delta C_1D_1B_1} = \frac{1}{2}$, демек $\Delta C_1D_1B_1$ – тікбұрышты үшбұрыш

$$R = \frac{\text{гипотенуза}}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

8 – амал: ΔFDE: $< FDE = 180° - < BDF - < EDC = 180° - \alpha - \alpha = 180° - 2\alpha$

$$cos < FDE = \frac{12}{13}$$

$$\cos(180° - 2\alpha) = \frac{12}{13}$$

$$-cos2\alpha = \frac{12}{13}$$

$$sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\frac{-12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{25}{26}}$$

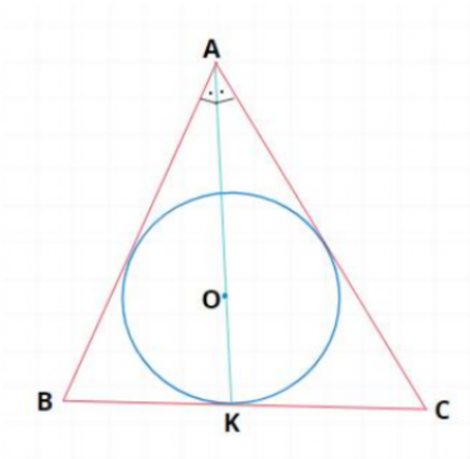
Дәл осылай $sin\gamma = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ яғни $\beta = 45°$

9 – амал: $S_{ABC} = 2R^2 sin\alpha sin\beta sin\gamma$ (1)

$$S_{ABC} = 2 * 13^2 * \frac{5}{\sqrt{26}} * \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{3}{\sqrt{13}} = 195$$

Жауабы: 195

2-мысал: ABC үшбұрышында A бұрышы 60°, іштей сызылған шеңбердің центрі AK биссектрисасын A шыңынан бастап $(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}$ қатынасында бөледі. B және C бұрыштарының өлшемдерін табыңыз [6].
Берілгені:

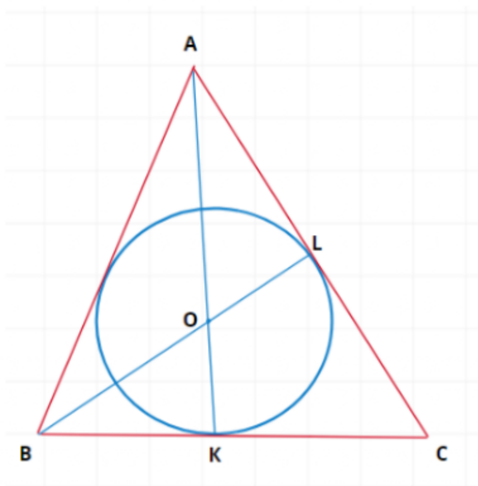


$< A = 60°$, AK-биссектриса

$$AO: OK = (\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}$$

$$< B = ?\ \ < C = ?$$

Шешімі: $< A = 60°$, $\frac{AO}{OK} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$, демек $< B + < C = 120°$



AB=c, BC=a, AC=b

1-амал: Биссектриса қасиеті бойынша $\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{KC} = \frac{c}{b}$

$$\begin{cases} BK + KC = a \\ \dfrac{BK}{KC} = \dfrac{c}{b} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} BK = a - KC \\ \dfrac{a - KC}{KC} = \dfrac{c}{b} \end{cases} \rightarrow ab - bKC = cKC$$

$$KC = \frac{ab}{b+c} \quad BK = a - \frac{ab}{b+c} = \frac{ac}{b+c}$$

2-амал: Үшбұрыштың биссектрисалары іштеу сызылған шеңбердің центрі болады

Демек BL-биссектриса, BO – ABK үшбұрышының биссектрисасы

Бис.қасиеті бойынша: $\frac{BK}{AB} = \frac{OK}{OA} \rightarrow \frac{\frac{ac}{b+c}}{c} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \rightarrow \frac{a}{b+c} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$(*)

3-амал: Синустар теоремасы бойынша ABC үшбұрышында: $\frac{a}{sin60°} = \frac{b}{sin<B} = \frac{c}{sin<C}$

$$\frac{a}{sin60°} = \frac{b}{sin < B} \qquad \frac{a}{sin60°} = \frac{c}{sin < C}$$

$$\frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{b}{sin < B} \qquad \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{c}{sin < C}$$

$$b = \frac{2asin < B}{\sqrt{3}} \qquad c = \frac{2asin < C}{\sqrt{3}}$$

4-амал: $\frac{a}{b+c} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ (*)

$$\frac{a}{\frac{2a}{\sqrt{3}}(sin < B + sin < C)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$$

$$sin < B + sin < C = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$2sin\frac{<B+<C}{2}cos\frac{<B-<C}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$2sin\frac{120°}{2}cos\frac{<B-<C}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \qquad cos\frac{<B-<C}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = cos15°$$

$$\begin{cases} \frac{<B-<C}{2} = 15° \\ < B + < C = 120° \end{cases} \rightarrow \begin{cases} < B - < C = 30° \\ < B + < C = 120° \end{cases} \rightarrow < B = 75° \quad < C = 45°$$

Жауабы: $< B = 75° \quad < C = 45°$

3-мысал: Теңбүйірлі үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы 12см, ал сырттай сызылған шеңбердікі 25см болса, осы үшбұрыштың қабырға ұзындықтарын табыңыз [7].
Шешімі: (1-ші жолы) ΔABC – теңбүйірлі үшбұрыш,

$$r = 12\text{см}, R = 25\text{см}$$

$$\text{AC} = BC = a, \qquad AB = c$$

ЕСКЕРТУ: бір үшбұрышқа іштей және сырттай сызылған шеңберлердің радиустарының байланысын төмендегі формула бойынша өрнектеп аламыз:

$$\begin{cases} R = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - c^2}} \\ r = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{2a-c}{2a+c}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 25 = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - c^2}} \\ 12 = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{2a-c}{2a+c}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 25\sqrt{4a^2 - c^2} \\ 24 = c\sqrt{\frac{(2a-c)(2a-c)}{(2a+c)(2a-c)}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = 25\sqrt{4a^2 - c^2} \\ c\sqrt{(2a-c)(2a-c)} = 24\sqrt{4a^2 - c^2} \end{cases}$$

$$\frac{a^2}{c(2a-c)} = \frac{25}{24}$$

$$24a^2 = 50ac - 25c^2$$
$$24a^2 - 50ac + 25c^2 = 0$$
$$6a \qquad\qquad -5c \qquad\qquad a_1 = \frac{5c}{4} \quad a_2 = \frac{5c}{6}$$
$$4a \qquad\qquad -5c$$

i) $\quad a_1 = \frac{5c}{4} \quad a^2 = 25\sqrt{4a^2 - c^2}$ $\qquad$ ii) $a_2 = \frac{5c}{6} \qquad a^2 =$
$25\sqrt{4a^2 - c^2}$

$$\left(\frac{5c}{4}\right)^2 = 25\sqrt{4\left(\frac{5c}{4}\right)^2 - c^2} \qquad \left(\frac{5c}{6}\right)^2 = 25\sqrt{4\left(\frac{5c}{6}\right)^2 - c^2}$$

$$\frac{25c^2}{16} = 25\sqrt{4\frac{25c^2}{16} - c^2} \qquad \frac{25c^2}{36} = 25\sqrt{4\frac{25c^2}{36} - c^2}$$

$$\frac{c^2}{16} = \frac{c\sqrt{21}}{2} \qquad \frac{c^2}{36} = \frac{4c}{3}$$

$$c = 0 \begin{pmatrix} \text{үшбұрыштың қабырғасы 0ден} \\ \text{үлкен болу керек} \end{pmatrix}$$

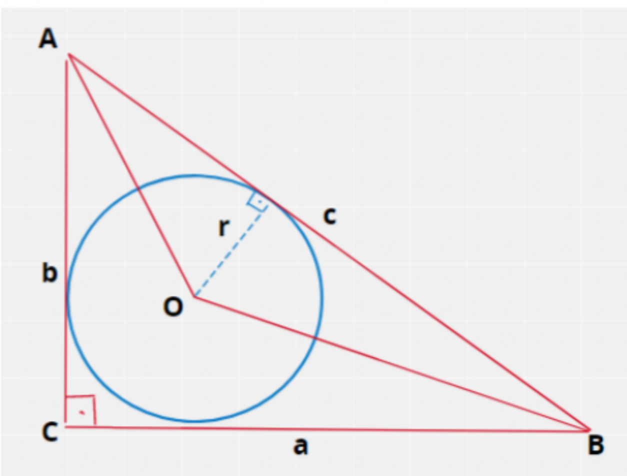
$c = 8\sqrt{21}$ $\mathrm{a} = 10\sqrt{21}$ $c = 48$ $\mathrm{a} = 40$

Жауабы: $10\sqrt{21}, 10\sqrt{21}, 8\sqrt{21}$ немесе 40, 40, 48

(2-шешімі): $\begin{cases} S = \sqrt{\frac{2a+c}{2}\left(\frac{2a+c}{2} - c\right)\left(\frac{2a+c}{2} - a\right)^2} \\ S = \frac{a*a*c}{4*25} \\ S = \frac{2a+c}{2} * 12 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешу арқылы жауапқа қол жеткізе аламыз

4-мысал: Ауданы 30 ға тең ABC тікбұрышты үшбұрышында AB-гипотенуза және O-іштей сызылған шеңбердің радиусы. AOB үшбұрышының ауданы 13ке тең болса, ABC үшбұрышының қабырғаларын табыңыз [8].

Шешімі: $S_{ABC} = 30$ $S_{AOB} = 13$



$$\begin{cases} \dfrac{ab}{2} = 30 \\ \dfrac{rc}{2} = 13 \\ \dfrac{a+b+c}{2} * r = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ab = 60 \\ c = \dfrac{26}{r} \\ a+b+c = \dfrac{60}{r} \end{cases}$$

$$a + b = \frac{60}{r} - \frac{26}{r} \qquad a + b = \frac{34}{r}$$

Пифагор т-сы бойынша: $a^2 + b^2 = c^2$ $\begin{cases} ab = 60 \\ a + b = 17 \end{cases}$ $a_1 = 12$ $b_1 = 5$ $a_2 = 5$ $b_2 = 12$

$$(a+b)^2 - 2ab = c^2$$

$$\left(\frac{34}{r}\right)^2 - 2 * 60 = \left(\frac{26}{r}\right)^2$$

r=2 *c=13*

Жауабы: 5, 12, 13.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1 Қайыңбаев Ж.Т. Жаттығу, есеп ... «Математика және Физика журналы» №3, 2017. 2-4 б.
2 Генденштейн Л.Э., Ершова А.П., Ершова А.С. Наглядный справочник по математике с примерами. Для абитурентов, школьников,учителей. – М.: Илекса, 2005, – 192 с.
3 Рустюмова И.П., Рустюмова С.Т. Математикадан бірыңғай ұлттық тестілеуге (ҰБТ) дайындауғаарналған тренажер. Бірінші басылым. – Алматы, 2014. – 492 б.
4 Гусев В.А., Мордкович А. Г. Математика: Справ. материалы – М.: Просвещение, 1999. – 416 с.
5 Титаренко А.М. 6000 задач по математике от простейших до олимпиадных. – Ростов н/Д: Феникс, 2011. – 432 с.
6 Кулагин Е.Д. и др 3000 конкурсных задач по математике. – М., 2003. – 380 с.
7 Бидосов Ә. Математиканы оқыту әдістемесі: Оқу құралы. 2-ші басылым. – Алматы, 2007. – 262 б.
8 Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике. 2-е изд,. дораб. – М. Просвещение, 2005. – 255 с.