*FTAXP 27.21.17*

*Ж.Т. Қайыңбаев[1], Т.С. Манап[2]*
[1,2]Сулейман Демирел атындағы Университет, Қаскелең қ., Қазақстан

# ҮШБҰРЫШТЫҢ БИССЕКТРИСАСЫ, МЕДИАНАСЫ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІН ПАЙДАЛАНЫП КҮРДЕЛІ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШУ ТӘСІЛДЕРІ

**Андатпа**. Жалпы геометриялық есептердің жартысы үшбұрыштарға байланысты болып келеді. Ал, сол есептердің тағы да жартысы үшбұрыштардың биссектрисасы және медианаларына байланысты болып келеді. Осы проценттердің өзі, болашақ мектеп математика пәні мұғалімдерін дайындау барысында үшбұрыштардың биссектрисасы, медианасы және олардың қасиеттері жайлы есептерге көп көңіл бөлу қажеттіліктерін білдіреді. Мақала, осындай маңызды мәселеге арналған. Мақалада үшбұрыштардың биссектрисалары мен медианаларының әр түрлі комбинациялары негізінде шығарылатын әр түрлі мағынадағы есептерді шығару тәсілдері қарастырылған. Мақала, бүгінгі және болашақ математика пәндері мұғалімдеріне арналған.

**Түйін сөздер:** есеп, үшбұрыш, үшбұрыштың элементтері, бұрыш, бұрыштың биссектрисасы, үшбұрыштың биссектрисасы, үшбұрыштың биссектрисасының ұзындығы, үшбұрыштың биссектрисасының қасиеттері, үшбұрыштың медианасы, үшбұрыштың медиансының ұзындығы, үшбұрыштың медианасының қасиеттері.

***

**Аннотация.** Половина общих геометрических задач связана с треугольниками. А еще половина тех же задач связана с биссектрисой и медианой треугольников. Тогда эти показатели, в процессе подготовки будущих школьных учителей математики, требуют повышенного внимания к задачам о биссектрисе треугольников, медиане и их свойствах. В статье рассмотрены способы решения задач различного значения, которые решаются на основе всевозможных комбинаций биссектрис и медиан треугольников. Эта статья предназначена для нынешних и будущих учителей математики.

**Ключевые слова:** задача, треугольник, элементы треугольника, угол, биссектриса угла, биссектриса треугольника, длина биссектрисы треугольника, свойства биссектрисы треугольника, медиана треугольника, длина медианы треугольника, свойства медианы треугольника.

***

**Abstract.** Half of the common geometric problems are related to triangles. And half of the that problems are related to the bisector and median of triangles. So in the process of training future school teachers of mathematics, require increased attention to problems about the bisector of triangles, the median and their properties. The article considers the ways of solving problems of various meanings, which are solved on the basis of different combinations of bisectors and medians of triangles. This article is intended for current and future math teachers.

**Keywords:** task, triangle, elements of the triangle, angle, the bisector of the angle, the bisector of the triangle, the length of the bisector of the triangle, properties of the bisector of a triangle, the median of the triangle, the length of the median of the triangle, properties of the median of a triangle.

Жалпы, мектеп оқушылары, студенттер, магистранттар және басқа да геометриялық мәселелер бойынша білім алуға талпынушылар сапалы геометриялық білім алу үшін ҮШБҰРЫШ мәселесін зерттеуден бастау керек. Неге? Оның екі үлкен себебі бар. Біріншісі, үшбұрыш деген фигура, ол – өз аты айтып тұрғандай үш бұрыштан құралады. Ал, бұрыш геометрияның негізгі ұғымы (геометрияның және оның ішінде планиметрияның негізгі ұғымдары – нүкте, түзу, жазықтық) болып табылмаса да ең басты ұғымдарының бірі [1]. Бұрышы жоқ фигура геометрияда тек қана геометрияның басты ұғымдарымен қатар, кесінді, түзудің бөліктері, сызықтар, дөңгелек және оның шекарасы – шеңбер немесе дөңгелектің кейбір элементтері ғана. Ал, өмірде бұрыш жоқ жер бар ма екен ...? Екіншіден, үшбұрыш – кез келген төртбұрыштың (шаршы, тіктөртбұрыш, ромб, трапеция, параллелограмм, кез келген төртбұрыш), бесбұрыштың, алтыбұрыштың және т.б диагональдары сызылса пайда болатын фигура. Сол сияқты үшбұрыш кеңістіктік денелердің де негізі [2].

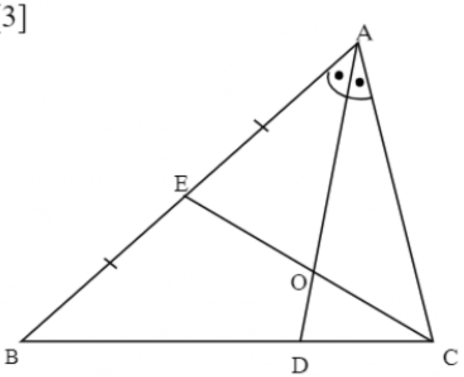
Осындай жағдайларға байланысты білім алушылардың геометриялық білімдерінің негізі олардың үшбұрыш жайлы білімдері негізінде қалыптасады десек қателеспейміз деп ойлаймыз.

1. *ABC үшбұрышында AD биссектрисасы BC қабырғасын BD : CD = 2 : 1 қатынасында бөледі. CE медианасы бұл биссектрисаны қандай қатынаста бөледі?* [3]

*Берілгені:*

*BD : CD = 2 :1*

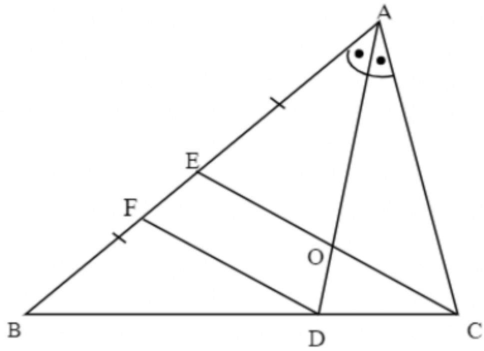
$\frac{AO}{OD} =$ ?



*Шешуі:*

*EC медиана, онда BE = AE*

*AD биссектриса, онда биссектриса қасиеті бойынша* $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$




$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}=\frac{2}{1}$$
$$\frac{AB}{AC}=\frac{2}{1}$$
$$AB=2AC$$

*AB = BE + AE = 2AE*

*2AE = 2AC*

*AE = AC, ондаACEүшбұрышы теңбүйірлі. ACE үшбұрышы теңбүйірлі болғандықтан AO әрі* медиана, *әрі биіктік болады. Сондықтан EO = OC.*

*D нүктесінен CE кесіндісіне параллель түзу жүргізейік,*

*AB қабырғасын F нүктесінде қисын.*

*Онда* $\Delta AEO \approx \Delta AFD$ *және* $\Delta BDF \approx \Delta BCE$

*ұқсас үшбұрыштар пайда болды.*

$$\Delta BDF \approx \Delta BCE \Rightarrow \frac{BD}{BC}=\frac{DF}{CE}=\frac{BF}{BE}$$

$$\frac{BD}{CD}=\frac{2}{1}$$
$$BD=2CD$$
$$BD=BC-CD=BC-\frac{BD}{2}$$
$$BD+\frac{BD}{2}=BC$$
$$BD=\frac{2}{3}BC$$

$$\frac{BF}{BE}=\frac{\frac{2}{3}BC}{BC}$$
$$\frac{BE-EF}{BE}=\frac{2}{3}$$
$$3BE-3EF=2BE$$
$$BE=3EF$$
$$BE=AE=3EF$$

$$\Delta AEO\approx\Delta AFD\Rightarrow\frac{AE}{AF}=\frac{EO}{FD}=\frac{AO}{AD}$$

$$\frac{AE}{AE+EF}=\frac{AO}{AO+OD}$$
$$\frac{3EF}{3EF+EF}=\frac{AO}{AO+OD}$$
$$\frac{3EF}{4EF}=\frac{AO}{AO+OD}$$
$$\frac{AO}{AO+OD}=\frac{3}{4}$$
$$4AO=3AO+3OD$$
$$AO=3OD$$
$$\frac{AO}{OD}=3$$

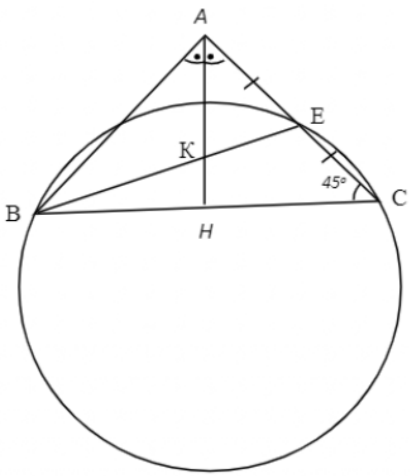
*Жауабы :  AO:OD = 3 : 1*

2. *ABC үшбұрышында AH биссектрисасы BE медианасын BK : KE = 2 қатынасында бөледі, ал ACB бұрышы 45°-қа тең.BCE үшбұрышының осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің ауданына қатынасын табыңыз [4].*

*Берілгені:*

*AE = CE*
∠BAH = ∠CAH
*∠ACB = 45°*
*BK : KE = 2*

$$\frac{S_{BCE}}{S_{шенбер}}=?$$



*Шешуі:*

*ABC үшбұрышында BK : KE = 2, яғни BK = 2KE және BE медиана. Медианалардың қиылусы нүктесі* медианаларын төбесінен бастап 2:1 қатынасында бөледі, демек К нүктесі медианалардың *қиылусы нүктесі, онда AH биссектрисасы да медина болады. Егер AH биссектриса әрі медиана болса, онда ABC теңбүйірлі үшбұрыш AB = AC болады.*

*AH – биссектриса және медиана болса, онда ол әрі биіктік те болады. Демек* $\angle AHC = 90^o$, $\angle ACB = 45^o$

*болғандықтан* $\angle CAH = 45^o$.

$\angle CAH = \angle BAH = 45^o$, $\angle BAC = CAH + \angle BAH = 90^o$, *онда ABC тікбұрышты теңбүйірлі үшбұрыш.*

*AB = AC =* $a$ *деп алайық, онда BC гипотенузасы* $a\sqrt{2}$ *болады*

$AE = CE = \dfrac{a}{2}$

*BCE үшбұрышында косинустар теоремасы бойынша*

$$BE^2 = BC^2 + CE^2 - 2BC \cdot CE \cos 45^o$$

$$BE^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$BE^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{4} - a^2$$

$$BE^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$BE = \frac{\sqrt{5}a}{2}$$

*BCE үшбұрышында синустар теоремасы бойынша, R - BCE үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусы*

$$\frac{BE}{\sin 45} = 2R$$

$$2R = \frac{\frac{\sqrt{5}a}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$2R = \frac{\sqrt{5}a}{\sqrt{2}}$$

$$R = \frac{\sqrt{5}a}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{S_{BCE}}{S_{шеңбер}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot CE\cdot\sin 45}{\pi R^2}=\frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\pi\left(\frac{\sqrt{5}a}{2\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{5a^2\pi}{8}}=\frac{a^2}{4}\cdot\frac{8}{5a^2\pi}=\frac{2}{5\pi}$$

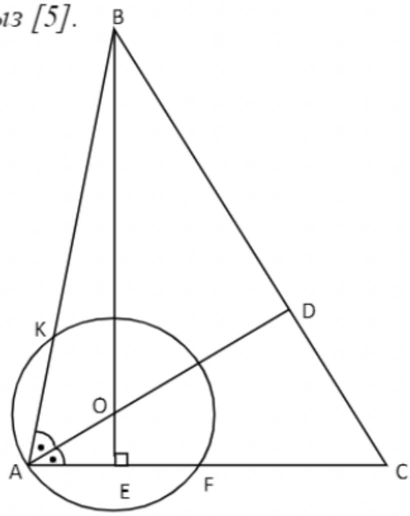
*Жауабы:* $\frac{S_{BCE}}{S_{шеңбер}}=\frac{2}{5\pi}$

3. *ABC сүйір бұрышты үшбұрышының AD биссектрисасы және BE биіктігі O нүктесінде қиылысады . Центрі O нүктесінде орналасқан радиусы R тең шеңбер A төбесі, AC қабырғасының ортасы және AB қабырғасының AK:KB=1:3 болатындай K нүктесі арқылы өтеді. BC қабырғасының ұзындығын табыңыз [5].*

Берілгені:

$BE \perp AC$
AF = CF
$AK : KB = 1 : 3$
*R шеңбер радиусы*

$BC = ?$




*Шешуі:*

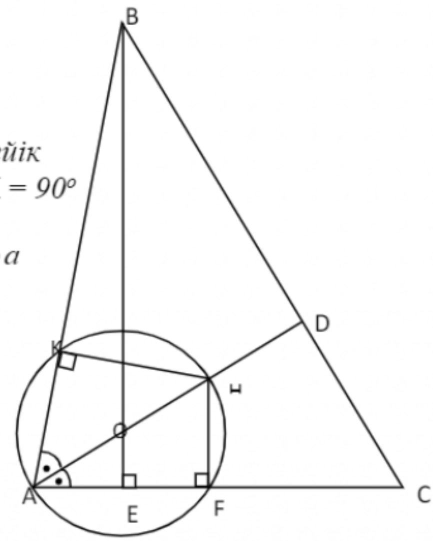
*O шеңбер центры, AO = R шеңбер радиусы, OE* $\perp$ AF, егер *шеңбердің* диаметрі *хордаға перпендикуляр* болса, онда ол хорданы тең екі бөлікке бөледі, демек AE = EF
AE = EF = $a$ деп алайық
AF = CF = 2$a$, AC = 4$a$

*Шеңберде KH және FH хордаларын жүргізейік AH диаметр болғандықтан* $\angle AKH = \angle AFH = 90^o$ *онда үшбұрыштың теңдігінің екінші белгісі бойынша* $\Delta AKH = \Delta AFH$, *демек* $AF = AK = 2a$

$\frac{AK}{KB}=\frac{1}{3}$

$\frac{2a}{KB}=\frac{1}{3}$

$KB = 6a$



$AB = 8a$

$\Delta ABE$ :

$$\cos\angle BAE = \frac{AE}{AB}$$

$$\cos\angle BAE = \frac{a}{8a}$$

$$\cos\angle BAE = \frac{1}{8}$$

$\Delta AOE$ :

$$\cos\angle OAE = \frac{AE}{AO}$$

$$\cos\angle OAE = \frac{a}{R}$$

$$a = R\cdot\cos\angle OAE$$

$$a = R\cdot\frac{3}{4}$$

$\angle BAE = 2\angle OAE$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos\angle OAE = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{8}}{2}}$$

$$\cos\angle OAE = \sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$\cos\angle OAE = \frac{3}{4}$$

*ABC үшбұрышында косинустар теоремасы бойынша*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\angle BAE$$

$$BC^2 = (8a)^2 + (4a)^2 - 2\cdot 8a\cdot 4a\cdot\frac{1}{8}$$

$$BC^2 = 64a^2 + 16a^2 - 8a^2$$

$$BC^2 = 72a^2$$

$$BC^2 = 72\left(\frac{3}{4}R\right)^2$$

$$BC^2 = 72\left(\frac{3}{4}R\right)^2$$

$$BC = \sqrt{72\cdot\frac{9}{16}R^2}$$

$$BC = \frac{9}{\sqrt{2}}R$$

*Жауабы:* $BC = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}R$

4. *ABC үшбұрышында ұзындықтары 4-ға тең BE биссектрисасы мен AD медианасы перпендикуляр. ABC үшбұрышының қабырғаларының ұзындықтарын табыңыз [6].*

*Берілгені:*

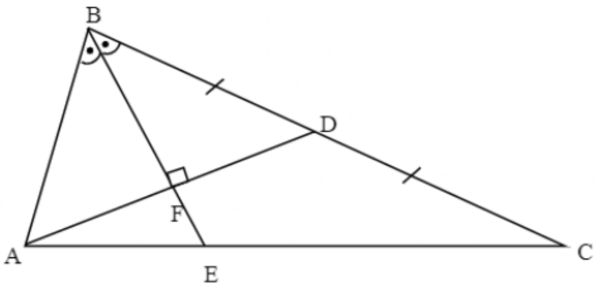
AD = BE = 4

$\angle ABE = \angle CBE$

$BD = CD$

$AB = ?$ $BC = ?$ $AC = ?$

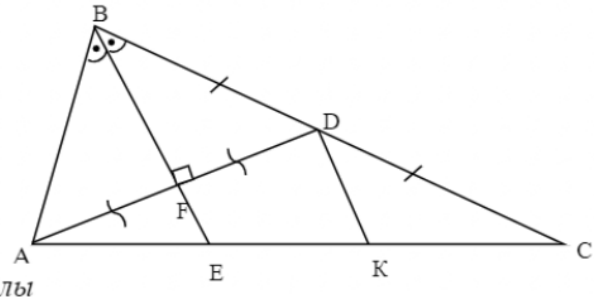
*Шешуі:*




*ABD үшбұрышында BF әрі биссектриса, әрі биіктік болғандықтан ол әрі медиана болады, демек ABD үшбұрышы теңбүйірлі AB = BD.*

$AB = BD = DC = a$

AD = 4, онда $AF = DF = 2$




*BE кесіндісіне D нүктесі арқылы*

*параллель түзу жүргізейік, AC кесіндісін K нүктесінде қисын.*

*BCE үшбұрышында BE ∥ DK және D нүктесі BC қабырғасынын ортасы болғандықтан DK үшбұрышынтың орта сызығы, онда*

$$DK = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

*ADK үшбұрышында EF ∥ DK және F нүктесі AD қабырғасынын ортасы болғандықтан EF үшбұрышынтың орта сызығы, онда*

$$EF = \frac{1}{2} DK = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$BE = BF + EF$

$4 = BF + 1$

$BF = 3$

*BFD тікбұрышты үшбұрышында пифагор теоремасы бойынша*

$BD^2 = BF^2 + DF^2$

$BD^2 = 3^2 + 2^2$

$BD^2 = 13$

$BD = \sqrt{13}$

$AB = BD = \sqrt{13}$

$BC = 2\,BD = 2\sqrt{13}$

*AFE тікбұрышты үшбұрышында пифагор теоремасы бойынша*

$AE^2 = AF^2 + EF^2$

$AE^2 = 2^2 + 1^2$

$AE^2 = 5$

$AE = \sqrt{5}$

*ABC тікбұрышты үшбұрышында биссектриса қасиеті бойынша*

$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CE}$

$\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{13}} = \frac{AE}{CE}$

$CE = 2AE$

$CE = 2\sqrt{5}$

$AC = AE + CE = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

*Жауабы:* $AB = \sqrt{13}$, $BC = 2\sqrt{13}$, $AC = 3\sqrt{5}$

5. *ABC сүйір бұрышты үшбұрышының AD биіктігінде M нүктесі алынды, ал BP биіктігінде BMC және ANC бұрыштары тік болатындай N нүктесі алынды. M және N нүктелерінің* арақашықтығы $4 + 2\sqrt{3}$, *MCN бұрышы 30°. CMN үшбұрышының CL биссектрисасының ұзындығын табыңыз [7].*

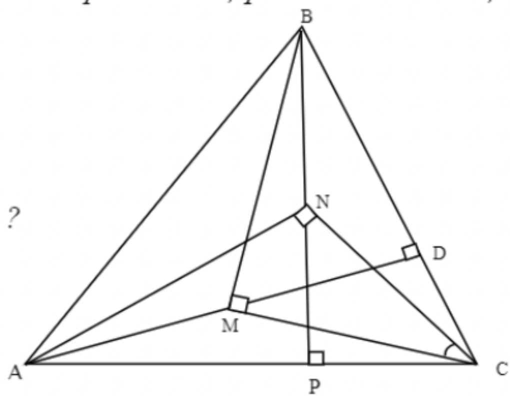
*Берілгені:*

$MN = 4 + 2\sqrt{3}$

$\angle MCN = 30°$

$\angle ANC = 90°$

$\angle BMC = 90°$ $\qquad CL = ?$




*Шешуі:*

BMC тікбұрышты үшбұрышында MD тік бұрышынан жүргізілген биіктік, онда метрикалық қатынастар орындалады

$MC^2 = CD \cdot BC$

ANC тікбұрышты үшбұрышында NP тік бұрышынан жүргізілген биіктік, онда метрикалық қатынастар орындалады

$NC^2 = CP \cdot AC$

BPC тікбұрышты үшбұрышында

$\cos\angle C = \frac{CP}{BC}$

ADC тікбұрышты үшбұрышында

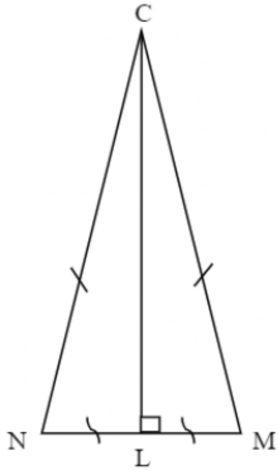
$\cos\angle C = \frac{CD}{AC}$

$\cos\angle C = \frac{CD}{AC} = \frac{CP}{BC}$

$CP \cdot AC = CD \cdot BC$

$NC^2 = MC^2$

$NC = MC$




NC = MC болғандықтан CMN үшбұрышы теңбүйірлі онда CL биссектрисасыәрі медиана, әрі биіктік болады

MN = $4 + 2\sqrt{3}$

MN = NL + ML = 2NL

NL = ML = $2 + \sqrt{3}$

∠ MCN = 30°

CL биссектриса болғандықтан

∠ NCL = 15°

∠ MCL = 15°

NCL тікбұрышты үшбұрышында

$tg\angle C = \frac{NL}{CL}$

$tg15^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{CL}$

$CL = \frac{(2+\sqrt{3})}{tg15^\circ}$

$$tg15^\circ = tg(45^\circ - 30^\circ) = \frac{tg45^\circ - tg30^\circ}{1 + tg45^\circ \cdot tg30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$CL = (2+\sqrt{3}) \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

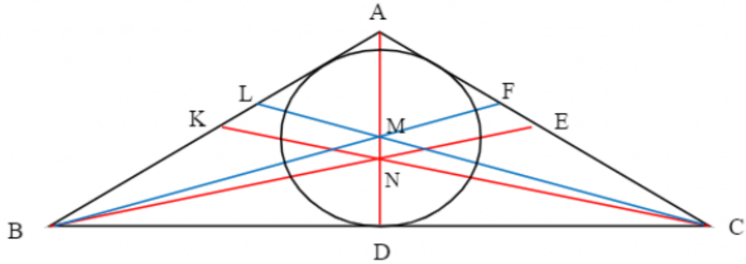
$$CL = (2+\sqrt{3}) \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3}) \cdot \frac{(3+\sqrt{3})^2}{9-3} =$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})(9+6\sqrt{3}+3)}{6} = \frac{6(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{6} = (2+\sqrt{3})^2 =$$

$$= 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$$

Жауабы: $CL = 7 + 4\sqrt{3}$

6. *Теңбүйірлі үшбұрышының медианалар мен биссектрисаларының қиылысу нүктелері арасындағы қашықтық 2-ге тең. Егер үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің ұзындығы $20\pi$ болса, үшбұрыштың периметрін анықтаңыз [8].*




*Берілгені:*

*$AB = AC$*
*$C_{шеңбер} = 20\pi$*

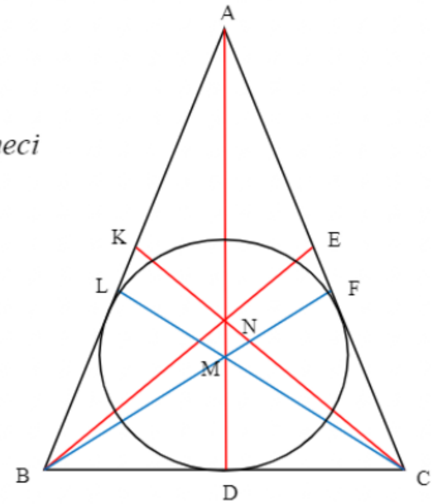
*$MN = 2$*
*AD, BE, CK - медианалар*

*AD, BF, CL – биссектрисалар*

*M - биссектрисалардың қиылысу нүктесі*

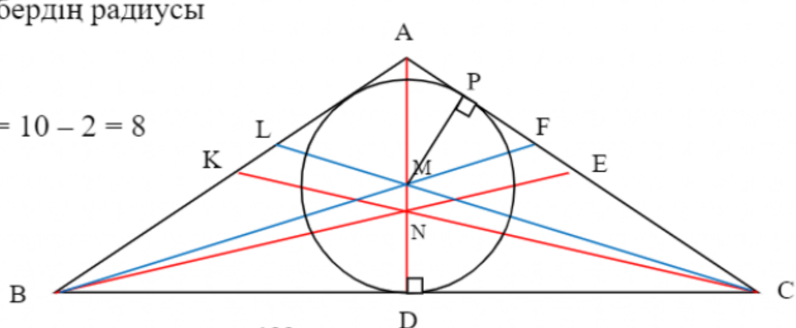
*N - медианалардың қиылысу нүктесі*

*$P_{ABC} = ?$*




*Шешуі:*

***1 жағдай:*** *ABC доғалбұрышты теңбүйірлі үшбұрыш AB = AC.*
*ABCтеңбүйірлі үшбұрышболғандықтан AD әрі медиана, әрі биссектриса және биіктік болады [9].*
*$BD = CD$*
*$\angle ADC = 90°$*
*Биссектрисалардың қиылысу нүктесі*үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центры, демек M нүктесі шеңбердің центры
AD BC-ға перпендикуляр және олшеңбердің центры арқылы өткендіктен MD радиус болады, D жанасу нүктесі
$C = 2\pi r$ , r - шеңбердің радиусы
$20\pi = 2\pi r$
$r = 10$, $MD = 10$
$ND = MD – MN = 10 – 2 = 8$



*N - медианалардың қиылысу нүктесі және ол* нүкте медианаларды төбесінен бастап 2:1 қатынасында бөледі. Демек AN = 2ND, AN = 16
AM = AN – MN = 16 – 2 = 14
AD = 24
*AC қабырғасынан шеңбермен жанасатын P нүктесін алайық, MP радиус және ол* жанасу нүктесіне перпендикуляр болады.
*Осыдан CP = CD*
*APM тікбұрышты үшбұрышындапифагор теоремасы бойынша*

$$AP^2 = AM^2 - MP^2$$

$$AP^2 = 14^2 - 10^2$$

$$AP^2 = 96$$

$$AP = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

*AC қабырғасын* $a$ *деп алайық, онда CP = AC – AP =* $a - 4\sqrt{6}$

*CP = CD =* $a - 4\sqrt{6}$

*ADC тікбұрышты үшбұрышындапифагор теоремасы бойынша*

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$a^2 = 24^2 + (a - 4\sqrt{6})^2$$

$$a^2 = 576 + a^2 - 8a\sqrt{6} + 96$$

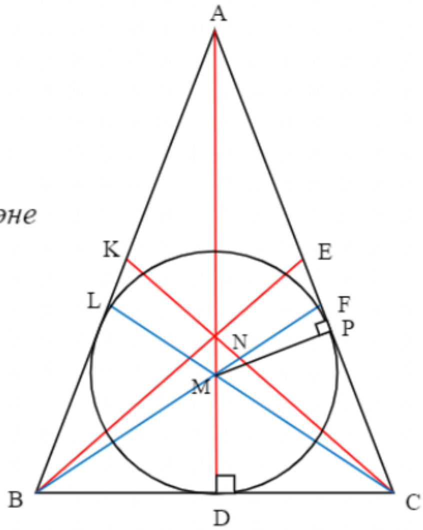
$$8a\sqrt{6} = 672$$

$$a = \frac{84}{\sqrt{6}}$$

$$a = 14\sqrt{6}$$

*AB = AC =* $a = 14\sqrt{6}$
*BD = CD*
*BC = BD + CD = 2CD = 2(* $a - 4\sqrt{6}$ *) = 2(* $14\sqrt{6} - 4\sqrt{6}$ *) =* $20\sqrt{6}$
$P_{ABC}$ *= AB + AC + BC =* $14\sqrt{6} + 14\sqrt{6} + 20\sqrt{6} = 48\sqrt{6}$

***2 жағдай:*** *ABC доғалбұрышты теңбүйірлі үшбұрыш AB = AC.*
*ABCтеңбүйірлі үшбұрышболғандықтан AD әрі медиана, әрі биссектриса және биіктік болады [10].*
*BD = CD*
*∠ADC = 90°*
*Биссектрисалардың қиылысу нүктесі*үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центры, демек M нүктесі шеңбердің центры
AD BC-ға перпендикуляр және олшеңбердің
центры арқылы өткендіктен MD радиус болады, D жанасу нүктесі




$C = 2\pi r$ , r - шеңбердің радиусы
$20\pi = 2\pi r$
r = 10, MD = 10
ND = MD+MN = 10 + 2 = 12
*N - медианалардың қиылысу нүктесі және ол* нүкте медианаларды төбесінен бастап 2:1 қатынасында бөледі.
Демек AN = 2ND, AN = 24
AM = AN + MN = 24+ 2 = 26
AD = 36

*AC қабырғасынан шеңбермен жанасатын P нүктесін алайық, MP радиус және ол* жанасу нүктесіне перпендикуляр болады [11].
*Осыдан CP = CD*
*MPF тікбұрышты үшбұрышындапифагор теоремасы бойынша*

$$AP^2 = AM^2 - MP^2$$

$$AP^2 = 26^2 - 10^2$$

$$AP^2 = 576$$

$$AP = \sqrt{576} = 24$$

*AC қабырғасын* $a$ *деп алайық, онда CP = AC – AP =* $a - 24$
*CP = CD =* $a - 24$
*ADC тікбұрышты үшбұрышындапифагор теоремасы бойынша*

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$a^2 = 36^2 + (a-24)^2$$

$$a^2 = 1296 + a^2 - 48a + 576$$

$$48a = 1872$$

$$a = 39$$

*AB = AC =* $a$ *= 39*
*BD = CD*
*BC = BD + CD = 2CD = 2(*$a$ *– 24) = 2( 39– 24) = 30*
$P_{ABC} = AB + AC + BC = 39 + 39 + 30 = 108$

*Жауабы :* $P_{ABC} = 108$ *және* $P_{ABC} = 48\sqrt{6}$ .

## Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1 Қайыңбаев Ж.Т. Жаттығу, есеп ... «Математика және Физика журналы» №3, 2017. 2-4 б.

2 Генденштейн Л.Э., Ершова А.П., Ершова А.С. Наглядный справочник по математике с примерами. Для абитурентов, школьников, учителей. – М.: Илекса, 2005, – 192 с.
3 Рустюмова И.П., Рустюмова С.Т. Математикадан бірыңғай ұлттық тестілеуге (ҰБТ) дайындауғаарналған тренажер. Бірінші басылым. – Алматы, 2014. – 492 б.
4 Гусев В.А., Мордкович А. Г. Математика: Справ. материалы – М.: Просвещение, 1999. – 416 с.
5 Титаренко А.М. 6000 задач по математике от простейших до олимпиадных. – Ростов н/Д: Феникс, 2011. – 432 с.
6 Кулагин Е.Д. и др 3000 конкурсных задач по математике. – М., 2003. – 380 с.
7 Бидосов Ә. Математиканы оқыту әдістемесі: Оқу құралы. 2-ші басылым. – Алматы,2007. – 262 б.
8 Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике. 2-е изд,. дораб. – М. Просвещение, 2005. – 255 с.
9 Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи: Пособие для учащихся. – 2-е изд., перераб. И доп. – М.: Просвещение, 1984. – 175 с.
10 Виноградова Л.В. Методика преподования математики в средней школе: Ростов н/Д.: Феникс, 2005. – 252 с.
11 Темербекова А.А. Методика преподования математики: М.: Гуманит. изд.центр ВЛАДОС, 2003. – 176 с.