

1990, vol. 63, no 2, pp.156-169

[21] Demko S. *A superposition theorem for unbounded continuous functions*. - Proc. Amer.Math.Soc., 1977, vol 66, no 1.

Резюме. Статья представляет собой краткий обзор результатов и задач в связи с 1-ой проблемой Гильберта.

О ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

Именов И.М.

Основы теории устойчивости были заложены в 1896 г., А.А.Ляпуновым; теория бифуркации и теория катастроф соответствуют двум различным возможностям обобщения теории Пуанкаре [1]. В 1881 г., Пуанкаре развил качественную теорию нелинейных дифференциальных уравнений, предприняв попытку глобального построения траектории автономных систем (т.е. систем, не содержащих время в явном виде) типа

$$F_i(x_j, a, t) = \frac{dx_i}{dt} \quad 1)$$

где $x_i(0) = x_{i0}$, t -время, a -параметр. Необходимость такого построения была необходима в связи с трудностью получения решения уравнения (1) в явном виде.

Во многих практически интересных случаях количественные результаты не имеют значения, важно знать будут ли происходить изменения состояний системы. Ответ на этот вопрос дает качественная теория динамических систем. Пуанкаре обнаружил, что многие качественные особенности решения (1) можно получить, не находя их решения в явном виде. При исследовании траектории (1) можно связать данные состояния с последующими. Эти траектории показывают, стремится ли система к равновесной точке (стоку), где ее состояние не изменяется, или она стремится стать неустойчивой, т.е. двигаться от точки равновесия (источника).

Центральную роль в решении этих вопросов играет вопрос об устойчивости. При изменении некоторых параметров устойчивое движение может стать неустойчивым, и могут возникнуть новые виды движения. Фундаментальные явления нарушения устойчивости, вызванные изменением параметрических условий, называется теорией бифуркации. Цель этой теории-развитие методов, позволяющих:

- а) показать существование точек ветвления при критических значениях и
- б) построить аналитические, сходящиеся выражения для наиболее важных решений, порождающих точки бифуркации. В последнее время Том [2] развил мощный метод классификации таких уравнений. Предполагается, что вся морфология решений может быть учтена посредством параметрических условий. Таким образом, начальная симметрия может быть нарушена из-за внешнего воздействия, не из-за изменения самой системы. Важное допущение теории Тома состоит в том, что основное уравнение

$$F_i(x_j, t, a(t)) = \frac{dx_i(t)}{dt} \quad 2)$$

где $a(t)$ - параметр, можно вывести с помощью потенциала

$$\frac{\partial x_i(t)}{\partial t} = - \frac{\partial V(x_j(t), a(t))}{\partial x_i} \quad 3)$$

где V - потенциальная функция. При этих условиях можно провести общую классификацию решений (3) для точек, в которых происходит изменение свойств устойчивости для стационарных состояний

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Такие решения существуют, если V не зависит от времени в явном виде; они называются элементарными катастрофами. Они образуют гиперповерхности, в окрестностях которых может происходить ветвление решений.

Элементарная теория катастроф [3] ограничивается множеством всех градиентов векторных полей в V (пространства поведения).

Том обнаружил, что для V существуют семь элементарных катастроф, (имеющих $\leq$ двух измерений) и C (пространства управления, имеющем $\leq$ четырех измерений). Каждая из них является критической точкой. Градиент потенциала функции, описывает ее и принимает однозначную форму в ее окрестности. Эта однозначная форма есть гладкая поверхность равновесных точек. Для множества K точек бифуркации равновесие нарушается и происходит качественное изменение состояния. Задачей элементарной теории катастроф является описание формой всех возможных состояний равновесия.

Семь элементарных катастроф описывают возможные для явлений, управляемых четырьмя (или меньшим числом) параметрами. Поверхностью поведения каждой модели катастрофы служит график точек, для которых первая производная потенциальной функции равна нулю. Параметры

Катастрофа	параметры управления	параметры поведения	Функция	Первая производная
1	2	3	4	5
Складка	1	1	$\frac{1}{3}x^3 - a_1x$	$x^2 - a_1$
Сборка	2	1	$\frac{1}{4}x^4 - a_1x - \frac{1}{2}a_2x^2$	$x^3 - a_1 - a_2x$
Седло	3	1	$\frac{1}{5}x^5 - a_1x - \frac{1}{2}a_2x^2 - \frac{1}{3}a_3x^3$	$x^4 - a_1 - a_2x - a_3x^2$
Бабочка	4	1	$\frac{1}{6}x^6 - a_1x - \frac{1}{2}a_2x^2 - \frac{1}{3}a_3x^3 - \frac{1}{4}a_4x^4$	$x^5 - a_1 - a_2x - a_3x^2 - a_4x^3$

1	2	3	4	5
Гиперболическая омбилика	3	2	$x^3 + y_3 + a_1x + a_3y + a_4xy$	$3x^2 + a_1 + a_4y + 3y^2 + a_3 + a_4x$
Эллиптическая омбилика	3	2	$x^3 - xy^2 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_3y^2$	$3x^2 - y^2 + a_1 + 2a_3x - 2xy + a_2 + 2a_3y$
Параболическая омбилика	4	2	$xy^2 + y^4 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2$	$2xy + a_1 + 2a_3x + x^2 + 4y^3 + a_2 + 2a_4y$

управления представлены коэффициентами. (a_1, a_2, a_3, a_4) .

В качестве примера разберем модель задачи о деформациях модели упругого кольца [1]. Для простоты рассмотрим один квадрант кольца (рис.1)

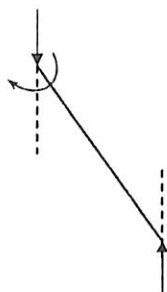


Рис.1

На кольцо действуют направленные по диаметру две противоположные силы $2P$ и два изгибающих момента $M=k(\varphi-\varphi_0)$, где k – изгибная жесткость, φ_0 – начальный угол наклона хорды кольца (см. [4]). Для потенциальной энергии системы имеем

$$V(\varphi, P, \varphi_0) = k(\varphi - \varphi_0)^2 - P \cos(\varphi - \varphi_0)$$

Первая производная V дает

$$V_1 = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 2k(\varphi - \varphi_0) - P \lambda \sin(\varphi - \varphi_0)$$

и вторая производная

$$V_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 2k - P \lambda \cos(\varphi - \varphi_0)$$

Приравнивая нулю первую производную, имеем

$$P = \frac{2k(\varphi - \varphi_0)}{\lambda \sin(\varphi - \varphi_0)}$$

Поведение кольца будет устойчивым при

$$2k - P \lambda \cos(\varphi - \varphi_0) > 0$$

и неустойчивым при

$$2k - P \lambda \cos(\varphi - \varphi_0) < 0$$

Нетрудно убедиться, что мы имеем случай «складки», когда устойчивость не теряется, и по существу решение сводится к известной задаче об устойчивости стержня с несовершенством [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А.Андронов, А.А.Витт и С.Е.Хайкин. Теория колебаний, М., 1963.
2. R.Thom. Strucyural Stabilitu and Morphogenesis. 1962.
3. Т.Постон, И.Стюарт. Теория катастроф и ее приложение, Издательство «Мир», 1980.
4. М.М.Алиев, В.В.Викторов, Г.С.Шапиро. «О деформациях кольцевых конструкций». Препринт №198 ИПМ АН СССР, 1982.
5. G.Augusti., Stabilita di stuctture elastiche elementary in presenza di graudi spostamenti Atti Accad. Sci. fis. mat. Napoli Serie 3^a vol 4 № 5 (1964).

Түйін

Дененің орнықтылығын сипаттайтын тендеулердің шешулерінің тармақталу аумағында гипербеттер құрайтын жеті элементар катастрофалар келтірілген. Мысал ретінде серпімді сақинаның деформациясы қарастырылған. Есеп жеті элементар катастрофалардың біреуімен сипатталатыны анықталған.

Резюме

Приведены семь элементарных катастроф, которые образуют гиперповерхности, в окрестностях которых может происходить ветвление

решение уравнений, описывающих устойчивость тела. В качестве примера рассмотрена задача о деформации кольца. Задача сводится к одной из семи катастроф.

The resume

Seven elementary catastrophes appearing on hyperfaces, in the neighborhood of which may occur equations describing stability a considered. As an example, the problem of strain in a elastic ring, reduced to one of the seven elementary catastrophes, is considered.

ОДНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $W_1(m)$

Туленбаев К.
Утюбаев Ержан

Алгебра дифференцирований Витта $W_1(m)$ определяется как $\{f\partial, f \in C[x]\}$.

Умножение определяется следующим образом: $f\partial * g\partial = f\partial(g)\partial$

$$x^\alpha \partial * x^\beta \partial = x^\alpha \partial (x^\beta) \partial = \beta x^\alpha x^{\beta-1} = \beta x^{\alpha+\beta-1}$$

Рассмотрим одномерное право-симметрическое представление W_1

$$a e_1 = \alpha(a) e_1$$

$$e_1 b = \beta(b) e_1$$

$$\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$$

$$\beta(ab) = \beta(ba)$$

Найдем функцию $\alpha(a)$.

$$x\partial * x\partial = x\partial$$

$$\alpha(x\partial * x\partial) = \alpha(x\partial) \alpha(x\partial) = \alpha(x\partial)$$

$$\alpha(x\partial) = 0 \text{ или } \alpha(x\partial) = 1$$

Считаем α не нулевая функция

$$\alpha(x^2) * (x) = \alpha(x^2 * x) = \alpha(x^2) = C_0$$

$$\alpha(x^2 * x^2) = \alpha(2x^3) = 2 \alpha(x^3)$$

$$(x^3\partial) = 1/2 C_0$$

$$\text{Подставим } x^n = x^{n-1} * x^2$$

$$\text{По индукции получаем } \alpha(x^n) = 1/2^{n-2} C_0$$

Теперь рассмотрим свойства функции $\beta(b)$.

$$\beta(ab) = \beta(ba)$$

$$x^2 * x^3 = 3x^4$$

$$x^3 * x^2 = 2x^4$$

Следовательно, $\beta(b)=0$