ҒТАМР 27.17

Т. Ж. Елемес[1]
[1]Сулейман Демирел атындағы Университет
Қаскелен, Қазақстан

МОНОМИАЛ СИММЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯСЫНЫҢ ДӘРЕЖЕЛІК ҚОСЫНДЫЛАР СИММЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯСЫНА КӨБЕЙТІНДІСІНІҢ МОНОМИАЛ СИММЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР БАЗИСЫНА КӨШУ МАТРИЦАСЫ

Аңдатпа. Бұл жұмыста, мономиал симметриялық функциясының дәрежелік қосындылар симметриялық функциясына көбейтіндісінің мономиал симметриялық функциялар базисына көшу матрицасын зерттейміз. Симметриялық функциялар алгебрасы үшін бес базис белгілі. Олар, мономиал симметриялық функциялар, толық біртекті симметриялық функциялар, элементарлы симметриялық функциялар, дәрежелік қосындылар симметриялық функциялары және Шур симметриялық функциялар. Осы базистердің бір-біріне көшу матрицасын сипаттау симметриялық функциялар теориясының негізгі есебі. Көшу матрицаларын сипаттау есебі есептелмелі комбинаторика, топтар теориясы, Ли алгебралары теориясы және алгебралық геометрия есептерімен тығыз байланысты. Бұл жұмыста, мономиал симметриялық функциясының дәрежелік қосындылар симметриялық функциясына көбейтіндісінің мономиал симметриялық функциялар базисына көшу матрицасын зерттейміз.

Түйін сөздер: симметриялық функция, симметриялық функция сақинасы, мономиал, элементар, дәрежелік қосындылар қатары, толық біртекті фукнция, Юнг таблицасы, Юнг жалпыланған қима.

***

Аннотация. В настоящей работе рассматривается матрица перехода мономально-симметричной функции к симметричным функциям соединения величин. Известны пять оснований для симметричных функций алгебры. Это монономически симметричные функции, полные однородные симметрические функции, элементарные симметричные функции, симметричные функции размерных включений и симметрические функции Шура. Описывается переходная матрица этих базисов, представлен основной расчет теории симметрических функций. Проблема описания трансферных матриц тесно связана с вычислительной комбинаторикой, теорией групп, теорией алгебр Ли и алгебраической геометрией.

Ключевые слова: симметричная функция, кольцо симметричной функции, одночленное, элементарное, ряд рядов соединений, полная однородная функция, таблица джунглей, обобщенное соединение.

***

Annotation. In this paper, we consider the transition matrix of a monomially symmetric function to symmetric functions of a combination of quantities. Five bases for symmetric algebra functions are known. They are monominally symmetric functions, full homogeneous symmetric functions, elementary symmetric functions, symmetric functions of dimensional inclusions, and symmetric functions of Shur. Describing the transition matrix of these bases is the basic calculation of the theory of symmetric functions. The problem of description of transfer matrices is closely connected with computational combinatorics, the theory of groups, the theory of Lie algebras and algebraic geometry.

Keywords: symmetric function, ring of symmetric function, monomial, elementary, series of series of compounds, complete homogeneous function, jungle table, generalized junction.

Негізгі бөлім

Айталық $\boldsymbol{x=\{x_1,x_2,\dots\}}$ шексіз айнымалылар жиыны болсын. Ал C[[x]] арқылы формалды дәрежелік қатарлар сақинасын белгілейік.

Кез-келген $\boldsymbol{n=\{1,2,\dots\}}$ үшін $\boldsymbol{f(x_1,x_2,\dots)\in \mathbb{C}[[x]]}$ функциясына $\boldsymbol{\sigma\in S_n}$ ([n]={1,2,…,n} жиыны үстінде анықталған алмастырулар тобы) элементінің әсерін анықтайық

$\boldsymbol{\sigma f(x_1,x_2,\dots)=f\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\dots\right),}$

Мұнда $\boldsymbol{\sigma(i)=i}$, егер $\boldsymbol{i>n.}$

Егер $\boldsymbol{f(x_1,x_2,\dots)\in \mathbb{C}[[x]]}$ функциясы кез-келген $\boldsymbol{n\in\{1,2,\dots\}}$ және $\boldsymbol{\sigma\in S_n}$ үшін

$\boldsymbol{\sigma f(x_1,x_2,\dots)=f(x_1,x_2,\dots)}$,

теңдігін қанағаттандырса, онда мұндай функцияны симметриялық функция деп атаймыз. $\boldsymbol{\Lambda^n}$ арқылы n-дәрежелі симметриялық функциялар сақинасын белгілейміз.

Егер $\boldsymbol{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r)}$ оң бүтін сандар тізбегі $\boldsymbol{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_r=n}$ және $\boldsymbol{\lambda_1\geq\lambda_2\geq\dots\geq\lambda_r\geq 0}$ шарттарын қанағаттандырса, онда тізбек n бүтін санының бөліктеуі деп аталады және $\boldsymbol{\lambda\vdash n}$ арқылы белгіленеді. Par(n) арқылы n санының барлық бөліктеулерінің жиынын белгілейік.

Мысалы.

Par(1)={(1)},
Par(2)={(2),(1,1)},
Par(3)={(3),(2,1),(1,1,1)},
Par(4)={(4),(3,1),(2,2),(2,1,1),(1,1,1,1)},

Par(5)={(5),(4,1),(3,2),(3,1,1),(2,2,1),(2,1,1,1),(1,1,1,1,1)}.

Айталық $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \vdash n$ болсын. $m_\lambda(x) =\in \Lambda^n$ симметриялық функциясы мономиалды деп аталады, егер төмендегідей анықталса

$$m_\lambda(x) = m_\lambda = \sum_\alpha x^\alpha,$$

мұндағы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ өрнегі $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$-векторының координаттарынан құрылған барлық әр түрлі адмастырулар.

Мысалы. Егер $n = 1$, онда

$$m_1 = \sum_i x_i$$

Егер $n = 2$, онда

$$m_2 = \sum_i x_i^2,$$

$$m_{11} = \sum_{i<j} x_i x_j$$

Егер $n = 3$, онда

$$m_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \cdots,$$

$$m_{21} = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + \cdots + \\ + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_2^2 x_4 + x_2 x_4^2 + \cdots,$$

$$m_{111} = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_5 + \cdots + \\ + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_5 + x_1 x_3 x_6 + \cdots.$$

Айталық $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r) \vdash n$ болсын. $p_\lambda(x) = \Lambda^n$ симметриялық функциясы дәрежелік қосындылар деп аталады, егер төмендегідей анықталса

$$p_n(x) = p_n = m_{(n)} = \sum_{i \ge 1} x_i^n, \qquad i \ge 1,$$

$$p_\lambda = p_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)} = p_{\lambda_1}, p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_r}.$$

Мысалы. Айталық $\lambda = (2,1) \vdash 3$ болсын, онда

$$p_{21} = p_2 \cdot p_1 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \cdots + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + \cdots + \\ + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_2^2 x_4 + x_2 x_4^2 + \cdots.$$

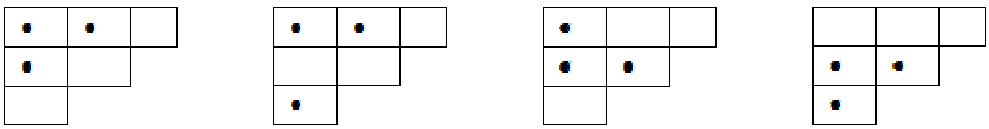
Анықтама.

Айталық $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r) \vdash k, \mu = \lambda = (\mu_1, \mu_2, \dots \mu_s) \vdash l$ және $\lambda \supseteq \mu$ болсын. Онда λ диаграмманы μ диаграмма бойынша жалпылама қиюды төмендегідей анықтаймыз

$$\lambda \backslash \mu = \{(\lambda_1 / \overline{\mu}_{\sigma(1)}, \lambda_2 / \overline{\mu}_{\sigma(2)}, \dots, (\lambda_r / \overline{\mu}_{\sigma(r)}) \mid \sigma \in S_r\},$$

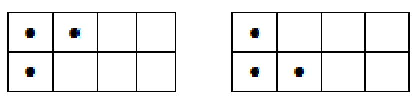
Мұндағы $(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \dots, \bar{\mu}_r)$ өрнегі $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)$ векторының координаттарынан құралған әлсіз композиция. Бұл пайда болған диаграммаларды .юнг жалпыланған қима деп атаймыз.

Мысалы. Айталық $\lambda = (3,2,1) \vdash 6$, $\mu = (2,1) \vdash 3$ болса, онда $(3,2,1) \backslash (2,1) =$



Айталық $\lambda \vdash n$, $\lambda \backslash \mu$ юнг жалпыланған қима диаграммалар болсын, ал $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) \vdash l$ ленталар тізбегі болсын, яғни μ_1 1-лерден тұратын лента, μ_2 2- лерден тұратын лента, …, μ_k k- лерден тұратын лента. Енді сүлбесі λ болатын, ал юнг жалпыланған қима диаграммасы $\lambda \backslash \mu$ болатын диаграмма қатарын солдан оңға қарай кемімеу ретімен μ-дің ленталарымен толтырамыз (ленталар тек горизонталь орналасу керек). Пайда болған юнг жалпыланған қима таблицалар санын $a_{\lambda\mu}^{\nu}$ арқылы белгілейік.

Мысалы. Айталық $\lambda = (2,1) \vdash 3$, $\mu = (2,2) \vdash 4$ және $\nu = (4,3) \vdash 7$ болсын. Онда $a_{(2,1)(2,2)}^{(4,3)} = 2$, яғни



Енді негізгі теоремаға тоқталайық.

Теорема. Айталық $\lambda \vdash k, \mu \vdash l$ болсын. Онда

$$m_\lambda p_\mu = \sum_{\nu \vdash k+l} a_{\lambda\mu}^{\nu} m_\nu.$$

Дәлелі. Айталық Айталық $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_s) \vdash k$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots \mu_t) \vdash l$ болсын. Бізге анықтамадан белгілі

$$p_\mu = p_{\mu_1} \cdot p_{\mu_2} \cdot \dots \cdot p_{\mu_t} = m_{\mu_1} \cdot m_{\mu_2} \cdot \dots \cdot m_{\mu_t}.$$

Тұжырым 4.9 ([2]) бойынша

$$m_\lambda p_\mu = m_\lambda \cdot (m_{\mu_1} \cdot m_{\mu_2} \cdot \dots \cdot m_{\mu_t}) = \sum_{\nu \vdash k+l} a_{\lambda\mu}^{\nu} m_\nu. \quad \square$$

Мысалы.

$$m_2 \cdot p_{21} : \begin{array}{|c|c|}\hline \bullet & \bullet \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & 2 \\ \hline 1 & 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \bullet & \bullet & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & 1 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} =$$

$$= 2m_{221} + 2m_{32} + m_{41} + m_5.$$

Әдебиеттер тізімі:

1 R.P. Stanley. Enumerative combinatorics, Volume 2. – Richard P. Stanley. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – 581 p.

2 M. Zabrocki. Introduction to Symmetric Functions. – 2004. – 111 p.