С.Н.Амиргалиева,
д.ф.-м.н.,
профессор,
Университет имени Сулеймана Демиреля.
Алматы/Казахстан

ДИНАМИКА ИГРОВЫХ ЗАДАЧ И ОПЕРАТОРНЫЕ КОНСТРУКЦИИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Структура дифференциальных игр описывается с помощью однопараметрических полугрупп операторов, на основе которых можно строить ε-стратегии и операторы описывают множества начальных позиций, благоприятных для того или иного игрока, в игровых моделях с терминальным множеством. В игровых моделях с терминальным функционалом операторы описывают цену игры.

1. Игры, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Рассмотрим динамическую систему, задаваемую дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = f(z,u,v), \tag{1.1}$$

где $z \in E^n$, $u \in U$, $v \in V$, U и V – компакты в евклидовых пространствах.

Параметрами U и V распоряжаются соответственно игроки P (догоняющий) и E (убегающий). Под допустимыми управлениями игроков P и E будут пониматься функции $u(t)$ и $v(t)$ со значениями в U и V, соответственно. Множество всех допустимых управлений игроков P и E, определенных на отрезке $[a,b]$ (полуинтервале $[a,b)$), будем соответственно обозначать через $U[a,b]$ и $V[a,b]$ ($U[a,b)$ и $V[a,b)$).

Считаем, что в дальнейшем функция f и множества U и V удовлетворяет следующим предположениям.

Предположение 1. *Функция $f(z,u,v)$ – непрерывна по совокупности переменных и локально Липшицева по z (т.е. удовлетворяет условию Липшица по z на каждом компакте $K \subset E^n$ с константой L_K, зависящей от K).*

Предположение 2. *Существует константа $C \geq 0$ такая, что для всех $z \in E^n$, $u \in U$, $v \in V$*

$$\left|\langle z, f(z,u,v)\rangle\right| \leq C(1+\|z\|^2).$$

Предположение 3. *Множество $f(z,U,v)$ – выпукло для всех $z \in E^n$, $v \in V$.*

Предположения 1 и 2 гарантируют существование, единственность и продолжимость решения $z(t)$ уравнения (1) на всю полуось $[0,+\infty)$ при произвольном начальном условии $z(0) = z_0$ и при подстановке в (1) вместо параметров u и v любых допустимых уравнений $u(t)$ и $v(t)$ игроков P и E, соответственно.

Будем обозначать решение $z(t)$ уравнения (1), соответствующее $u(t)$, $v(t)$ и начальному условию $z(0) = z_0$ через

$$z(t \mid u(\cdot), v(\cdot), z_0).$$

Рассмотрим произвольный интервал $[0,\theta]$, $\theta<+\infty$. Предположение 3 гарантирует в топологии равномерной сходимости на отрезке $[0,\theta]$ компактность множества решений, соответствующих различным допустимым управлениям $u(\cdot)$ игрока P и начальной позиции z_0. Сказанное остается в силе, если начальная позиция z_0 не фиксирована и пробегает некоторое компактное множество $K\subset E^n$.

Из описанного свойства следует, что, если $u_k(\cdot)\in U[0,\theta]$, $x_k\in K$, $k=1,2,...$ – некоторые последовательности, и

$$z_k(t)=z(t\mid u_k(\cdot),v(\cdot),x_k)$$

последовательность соответствующих решений уравнения (1), то существует подпоследовательность $\left\{z_{k_m}(\cdot)\right\}$ последовательности $\left\{z_k(\cdot)\right\}$, которая равномерно на $[0,\theta]$ сходится к функции $z_0(\cdot)$. Причем существуют такие $u(\cdot)\in U[0,\theta]$, $x\in K$, что

$$z_0(t)=z(t\mid u(\cdot),v(\cdot),x).$$

Рассмотрим два класса игровых моделей: игровые модели с терминальным множеством и игровые модели с терминальным функционалом.

В первом случае цели игроков описываются с помощью терминального множества $M\subset E^n$ и множества фазовых ограничений $N\subset E^n$. Множества M и N предполагаются замкнутыми, причем $M\subset N$.

Зафиксируем момент $\theta>0$. Цель игрока P состоит в том, чтобы добиться включений $z(\theta)\in M$, $z(t)\in N$, для всех $t\in[0,\theta]$, т.е. вывести траекторию $z(t)$ на M в момент θ, удержав ее во множестве N. Цель игрока E – противоположная и состоит в том, чтобы добиться условий: либо $z(\theta)\notin M$, либо для некоторого $t<\theta$ $z(t)\notin N$.

В игровых моделях с терминальным функционалом цели игроков описываются с помощью отображения $\Phi:E^n\to E^1$. Цель игрока P – минимизировать функционал $\Phi(z(\theta))$, зависящий от конца траектории. Цель игрока E – противоположная, т.е. состоит в том, чтобы максимизировать этот функционал.

В игровых моделях с терминальным множеством, M и N выбирались не произвольными, а замкнутыми подмножествами в E^n. Это делается для удобства построения соответствующего математического аппарата. В этих же целях наложим некоторые условия на функцию $\Phi(z)$. Считаем, что $\Phi(z)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L_K на каждом компакте K.

Рассмотренные игровые модели имеют между собой большую связь. Функционал Φ может представлять собой расстояние до множества M. В этом случае цель игрока P – приблизиться в момент θ как можно ближе к множеству M. Формально первую игру можно свести ко второй полагая $\Phi(z)=0$, $z\in M$ и $\Phi(z)=1$, $z\notin M$. Однако, указанная функция не удовлетворяет требуемому выше условию Липшица и математический аппарат, развитый для исследования этих классов игр во многом различается.

Характерная особенность дифференциальных игр заключается в том, что игроки не знают действий противника в будущем. В статье применяются различные стратегии игроков, использующие ту или иную информацию о текущей позиции и о действиях противника.

Игрок E будет выбирать свое текущее управление, пользуясь в основном знанием текущей позиции.

Для игрока P используются различные стратегии. Это ε- стратегии [1], в которых предполагается наибольшая информационная дискриминация противника: игрок E сообщает свое управление игроку P на некоторое время $\varepsilon > 0$ вперед. Кроме того, игрок P пользуется информацией о текущей позиции. Поскольку параметром ε распоряжается игрок E, то ε-стратегии эквивалентны стратегиям, в которых игрок P выбирает свое текущее управление, зная начальную позицию и всю предысторию действий противника. Эти стратегии строятся на основе некоторых вольтеровских отображений. Частным случаем последних стратегий, являются стратегии, в которых игрок P выбирает свое текущее управление, зная начальную позицию и текущее управление противника. Такую стратегию будем называть контрстратегией.

2. Операторы над множествами. Рассмотрим динамическую систему, которая описывается уравнением (1.1) и удовлетворяет предположениям 1-3.

Определение 1. *Через P_ε, $\varepsilon \geq 0$, обозначим оператор, который ставит в соответствие каждому замкнутому множеству $M \subset E^n$ множество $P_\varepsilon M$ всех точек $z_o \in E^n$ таких, что для любого допустимого управления $v(t)$, $t \in [0, \varepsilon]$, игрока E существует допустимое управление $u(t)$, $t \in [0, \varepsilon]$, игрока P, такое, что для соответствующего решения $z(t) = z(t \mid u(\cdot), v(\cdot), z_0)$ уравнения (1.1) с началом в z_0 выполняется включение $z(\varepsilon) \in M$, т.е. траектория $z(t)$ с началом в z_0 попадает на M в момент ε.*

Формально, с помощью операций объединения и пересечения, оператор P_ε можно описать следующим образом

$$P_\varepsilon M = \bigcap_{v(\cdot)\in V[0,\varepsilon]} \bigcup_{u(\cdot)\in U[0,\varepsilon]} \{z_0 \in E^n : z(\varepsilon \mid u(\cdot), v(\cdot), z_0) \in M\}. \qquad (1.2)$$

Замечание 1. В определении 1 можно считать, что управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ определены только на полуоткрытом интервале $[0, \varepsilon)$, поскольку изменение значений управлений $u(t)$ и $v(t)$ в одной точке не изменяет траекторию. При этом решение $z(t)$, определенное на $[0, \varepsilon)$ всегда можно единственным образом непрерывно продлить на отрезок $[0, \varepsilon]$, положив $z(\varepsilon) = \lim\limits_{t\to\varepsilon} z(t)$. Этот факт будет использоваться в дальнейшем.

Замечание 2. Множество $P_\varepsilon M$ можно интерпретировать как множество начальных позиций z_0, начиная из которых игрок P может вывести траекторию $z(t)$ на M в момент ε, зная управление $v(t)$ игрока E наперед на всем интервале $[0, \varepsilon]$. Если же $z_o \notin P_\varepsilon M$, то существует такое управление игрока E, что для всех допустимых управлений игрока P справедливо $z(\varepsilon) \notin M$. В этом случае стратегии игроков являются программными, т.е. они выбирают свои управления сразу на всем интервале $[0, \varepsilon]$. При этом игрок E знает z_0, а игрок P пользуется информацией о z_0 и о уже выбранном управлении $v(t)$, $t \in [0, \varepsilon]$.

Лемма 1. *Множество $P_\varepsilon M$ является замкнутым для множества M.*

Положим $P_{N,\varepsilon} M = (P_\varepsilon M) \bigcap N$. Очевидно, что $P_{N,\varepsilon} M$ является замкнутым множеством, если M и N – замкнуты. Таким образом, лемма 1 позволяет повторно применять операторы $P_\varepsilon M$ и $P_{N,\varepsilon} M$.

Пусть $\omega = \{\tau_0 = 0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_k = t\}$ – конечное разбиение отрезка $[0, t]$. Положим $P_N^\omega M = P_{N,\delta_1} P_{N,\delta_2} \ldots P_{N,\delta_k} M$, где $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i = 1,...,k$.

Замечание 3. Если $N = E^n$, то будем писать $P^{\omega}M = P_{\delta_1}P_{\delta_2}...P_{\delta_k}M$. Пусть $z_0 \in P^{\omega}M$ и в начальный момент времени игрок P знает управление игрока E вперед на время δ_1. Тогда P может целиться и попасть на $P_{\delta_2}...P_{\delta_k}M$ в момент $\delta_1 = \tau_1$. Если он, попав на $P_{\delta_2}...P_{\delta_k}M$, узнает управление игрока E на время δ_2, то игрок P может целиться и попасть на множество $P_{\delta_3}...P_{\delta_k}M$ в момент времени $\tau_2 = \delta_1 + \delta_2$. Продолжая процесс дальше, игрок P добьется включения $z(t) \in M$. При этом игрок P выбирает свое управление в точках τ_{i-1}, $i = 1,...,k$, на интервале $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, зная $z(\tau_{i-1})$ и будущее управление игрока E на интервале $[\tau_{i-1}, \tau_i)$. Аналогично, если $z_0 \notin P^{\omega}M$, то игрок E может в момент $\tau_0 = 0$ выбрать такое управление, что для любого управления игрока P соответствующая траектория не попадает на множество $P_{\delta_2}...P_{\delta_k}M$ в момент $\delta_1 = \tau_1$. Продолжая процесс дальше, получим, что $z(t) \notin M$. При этом игрок E выбирает свое управление в точках τ_{i-1} на следующий интервал $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, зная $z(\tau_{i-1})$.

С помощью формулы (1.2) можно представить $P_N^{\omega}M$ в следующем виде

$$P_N^{\omega}M = \bigcap_{v_1(\cdot)\in V[0,\tau_1)} \bigcup_{u_1(\cdot)\in U[0,\tau_1)} \bigcap_{v_2(\cdot)\in V[\tau_1,\tau_2)} \bigcup_{u_2(\cdot)\in U[\tau_1,\tau_2)} \cdots$$

$$\cdots \bigcap_{v_k(\cdot)\in V[\tau_{k-1},t]} \bigcup_{u_k(\cdot)\in U[\tau_{k-1},t]} \{z_0 \in N : z(t) = z(t \mid \{u_1(\cdot), u_2(\cdot),...,u_k(\cdot)\},$$

$$\{v_1(\cdot), v_2(\cdot),...,v_k(\cdot)\}, z_0) \in M, z(\tau_i) \in N, i = 1,...,k-1\}. \qquad (1.3)$$

Определение 2. $\widetilde{P}_{N,t}M = \bigcap_{|\omega|=t} P_N^{\omega}M$.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\widetilde{P}_{N,t_1+t_2}M = \widetilde{P}_{N,t_1}\widetilde{P}_{N,t_2}M.$$

3. Операторы над функциями. Пусть $\Phi : E^n \to E^1$ удовлетворяет условию Липшица с константой L_K на каждом компакте K и выполняются предположения 1-3.

Определим оператор R_ε, который ставит в соответствие любой непрерывной функции $\varphi : E^n \to E^1$ функцию

$$\psi(x) = \sup_{v(\cdot)\in V[0,\varepsilon]} \min_{u(\cdot)\in U[0,\varepsilon]} \varphi(z(\varepsilon \mid u(\cdot), v(\cdot), x)). \qquad (1.4)$$

Отметим, что в силу непрерывности φ и предположения 3 минимум в (1.4) достигается.

Оператор R_ε можно связать с оператором P_ε. Действительно, если $D_c(\varphi) = \{x \in E^n : \varphi(x) \le c\}$, то

$$D_c(\psi) = P_\varepsilon D_c(\varphi).$$

Доказательство этого равенства вытекает непосредственно из определения.

Пусть $\omega = \{\tau_0 = 0 \le \tau_1 \le ... \le \tau_k = t\}$, $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i = 1,...,k$, – некоторое разбиение. Положим

$$R^{\omega}\varphi = R_{\delta_1}...R_{\delta_k}\varphi,\ \widetilde{R}_t\varphi = \sup_{|\omega|=t} R^{\omega}\varphi.$$

Справедлив аналог формулы (1.3):

$$R^{\omega}\Phi(x) = \sup_{v_1(\cdot)\in V[0,\tau_1)} \min_{u_1(\cdot)\in U[0,\tau_1)} \sup_{v_2(\cdot)\in V[\tau_1,\tau_2)} \min_{u_2(\cdot)\in U[\tau_1,\tau_2)} ...$$

$$... \sup_{v_k(\cdot)\in V[\tau_{k-1},\tau_k]} \min_{u_k(\cdot)\in U[\tau_{k-1},\tau_k]} \Phi(z(t\,|\,\{u_1(\cdot),...,u_k(\cdot)\},\{v_1(\cdot),...,v_k(\cdot)\},x)) \quad (4.9)$$

Из предположения 2 и локальной Липшицевости Φ можно вывести следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любого* $x \in E^n$ *выполняется*

$$\widetilde{R}_{t_1+t_2}\Phi(x) = \widetilde{R}_{t_1}\widetilde{R}_{t_2}\Phi(x).$$

Литература

1. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. - Киев, 1992. - 260 с.
2. Остапенко В.В., Амиргалиева С.Н., Остапенко Е.В. Выпуклый анализ и дифференциальные игры. - Алматы, 2005. - 392 с.
3. Ostapenko Valentin V. Convexity in differential games. Springer Book ."Pareto-Optimality. Game Theory and Equilibria", ed. P. Pardalos. 2008.

Түйін

Мақалада динамикасы дифференциальдық теңдеулермен сипатталатын дифференциальдық ойындар қарастырылған. Бұл ойын модельдерінде жақындау-алшақтау есептері терминальды жиын, фазалық шектемелер жиыны және терминальдық функциональдар арқылы сипатталған. Ойыншылардың стратегиялары ε-стратегия және оның өзгерістері арқылы беріліп, олардың өзара байланыстары қарастырылады.

Resume

In article the differential games which dynamics is described by ordinary differential equations are considered. In these gaming models tasks of convergence-evasion which are described by terminal set, set of phase restrictions or a terminal functional are researched. Various strategy of players are described: - strategy, its modifications connection in between also is established.

Özet

Makalede dinamikleri adi diferansiyel denklemler tarafından açıklanan diferansiyel oyun olarak kabul edilir. Bu oyun modelleri, terminal seti tarafından açıklanmıştır yakınsama-kaçırma görevleri aşaması kısıtlamaları ayarlamak veya fonksiyonel bir terminal araştırılmıştır. Oyuncuların çeşitli strateji açıklanmıştır: - stratejisi arasında modifikasyonları bağlantısı da kuruldu.

З.Ж. Раев
Жалал-Абадский государственный университет
Жалал-Абад/Кыргызстан

СТРУКТУРНАЯ СХЕМА ЦИФРОВОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ

Использование цифровых методов обработки информации в системах автоматического управления позволяет реализовывать сложные алгоритмы управления и обеспечивать их быструю сменяемость. Кроме того, цифровые устройства, как правило, более надежны в работе и имеют меньшие габариты и массу [1]. Автоматические системы, полностью