Министерство образования и науки Республики Казахстан

УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ СУЛЕЙМАНА ДЕМИРЕЛЯ

УДК 510.67; 512.5; 512.7

№ гос. регистрации 0112РК02894

Инв. №0213РК02891

ГРНТИ 27.03.06, 27.17.19

УТВЕРЖДАЮ

И.о. ректора Университета имени Сулеймана Демиреля, доктор педагогических наук, профессор

_____________ Н. Сейткулов

«8» ноября 2013 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ СТРУКТУР

(промежуточный)

Научный руководитель НИР,
Зав. кафедрой,
д.ф.-м.н., доцент Вербовский В.В.

Каскелен 2013

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы, зав. кафедрой д.ф.-м.н., доцент,	20.10.2013 подпись, дата	В.В.Вербовский (введение, разделы 2.1, 2.2, 2.3, заключение)
Исполнитель, СНС к.ф.-м.н.	20.10.2013 подпись, дата	К.М. Туленбаев (раздел 2.4)

РЕФЕРАТ

Отчет 32 с., 1 ч., 20 источников.

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, УПОРЯДОЧЕННЫЕ СТРУКТУРЫ, СЛАБАЯ О-МИНИМАЛЬНОСТЬ, ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ, ALIA-АЛГЕБРА

Объектом исследования являются частично упорядоченные структуры, формульные подмножества и функции в этих структурах, теория моделей первого порядка, алгебры.

Цель работы — изучение вариантов о-минимальности для частично упорядоченных алгебраических структур, в том числе решеточно и булево упорядоченных структур.

Методами исследований являются: методы классической математической логики; комбинаторные методы; методы теории моделей; методы алгебры.

В процессе работы исследовались теоретико-модельные и алгебраические свойства частично упорядоченных структур, ALIA-алгебры.

Все полученные результаты являются новыми, носят фундаментальный, теоретический характер и заключаются в следующем:

1. Доказана локальная монотонность и непрерывность одноместных определимых функций, определимых в частично упорядоченных группах.

2. Доказана коммутативность ро-максимальных частично упорядоченных групп.

3. Предложено новое понятие выпуклого множества для частичных порядков.

4. Найдена формула полилинейной части для ALIA-алгебр.

РЕФЕРАТ

Есеп 32 б., 1 бөлім., 20 дерек көзі.

Негізгі сөздер: БІРІНШІ РЕТТІ ПРЕДИКАТ ЛОГИКАСЫ, РЕТТЕЛГЕН ҚҰРЫЛЫМДАР, ӘЛСІЗ О-МИНИМАЛДЫҚ ҚҰРЫЛЫМ, МОДЕЛЬДЕРДІҢ ТЕОРИЯСЫ, ALIA-АЛГЕБРА

Зерттудің объектісі жартылай реттелген алгебралық құрылымдар, формульді көпмүшеліктер және осы структурадағы функциялар, бірінші ретті теория-модельдік құрылым, алгебра болып табылады.

Зерттеудің мақсаты — жартылай реттелген алгебралық құрылымдардың, оның ішінде торлы және бульдік реттелген құрылымдардың және әлсіз Йордан алгебраларының о-минималдық қасиеттерін зерттеу.

Зерттеу әдістері болып табылатындар: комбинаторлы әдістер, классикалық математикалық әдістер, модел теориясының әдістері және алгебра әдістері.

Жұмыс барысында теоретикалық-моделді жартылай реттелген алгебралық құрылымдар, перманент, ALIA-алгебрасызерттелді

Барлық белгіленген нәтижелер жаңа болып табылады және соған қарамас-тан іргелі, қағидалы сипатта негізделген. Олар:

1. Жартылай реттелген топтарда анықталған бірорынды функциялардың үзіліссіздігі және жергілікті монотондығы дәлелденді.
2. Ро-максимальды реттелген топтардың коммутативтілігі және бөлінгіш-тігі мен толықтығы дәлелденді.
3. Дербес ретке арналған дөңес жиындардың жаңа ұғымы енгізілді.
4. ALIA-алгебрасының поли-сызықты бөлігіне формула табылды.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 7
1 ВЫБОР НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ 9
2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ 13
2.1 Унарные определимые функции в слабо о-минимальных частично упорядоченных структурах 13
2.2 О коммутативности ро-максимальной упорядоченной группы 18
2.3 Различные способы обобщения слабой о-минимальности на частичные порядки 23
2.4 Формула полилинейной части ALIA-алгебр 25
3 ОБОБЩЕНИЕ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ 27
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 29
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 31

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

FO	–	Логика предикатов первого порядка
$M \models T$	–	M —модель теории T
$M \models \varphi$	–	Формула φ истинна в модели M
$\mathrm{dcl}(A)$	–	Определимое замыкание множества A
$\mathrm{acl}(A)$	–	Алгебраическое замыкание множества A
$S_1(A)$	–	Множество всех полных 1-типов над множеством A
$\exists$, $\forall$	–	Кванторы существования и всеобщности
$\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\rightarrow$	–	Логические связки дизъюнкции (ИЛИ), конъюнкции (И), отрицания (НЕ) и импликации (следования)
card (A)	–	Мощность множества A

ВВЕДЕНИЕ

Исследования, проводимые в рамках данного проекта, посвящены теоретико-модельным и алгебраическим вопросам частично упорядоченных структур.

Проводимые исследования носят фундаментальный характер, их научная значимость обусловлена применением глубоких, современных результатов математической логики (теории моделей) и алгебры. Практическая значимость определяется тем, что полученные сведения о частично упорядоченных структурах могут применяться в информатике, где частично упорядоченные структуры играют важную роль, например, в общей теории языков спецификаций реагирующих информационных систем, в общей теории реляционных баз данных или общей теории баз данных с теоретико-модельными ограничениями, кроме того, свойства перманента могут иметь многочисленные практические применения.

Инновационное преимущество проводимых исследований заключается в том, что исследования осуществляются современные методами математической логики, теории моделей и алгебры, а результаты носят фундаментальный, междисциплинарный характер.

Новизна и перспективность исследований заключается в применении последних результатов по теории моделей, по таким вопросам как исследование слабо о-минимальных и упорядоченно стабильных теорий, полученных сотрудниками проекта, в интегрировании методов теории моделей и методов алгебры, что может привести к новым результатам и новой методологии в разработке логико-алгебраических методов исследования частично упорядоченных структур.

Научно-технический уровень исследований подтверждается публикациями исполнителей, докладами и приглашениями на престижные международные конференции исполнителей проекта.

Существующий уровень публикаций и международного сотрудничества и заинтересованность в совместных научных исследованиях ведущих специалистов Университета Иллинойс в Чикаго (Д. Балдвин), Университета Лион-1 (Ф. Вагнер), с которыми уже проведены совместные исследования участниками проекта в прошлом, а результаты уже опубликованы в ведущих международных журналах, предполагают высокую конкурентоспособность ожидаемых результатов.

1 ВЫБОР НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ

Упорядоченные алгебраические структуры являются одним их классических объектов в математике. Достаточно только вспомнить упорядоченное поле вещественных чисел или арифметику. Однако в теории моделей общая теория упорядоченных структур начала развиваться только после того, как в 1984 году А. Пиллай и Ч. Стейнхорн ввели понятие о-минимальности в работе [1], которое оказалось весьма плодотворным.

Напомним, что линейно упорядоченная структура называется о-минимальной, если любое ее формульное подмножество является конечным объединением интервалов и точек. Классический пример о-минимальной структуры — упорядоченное поле вещественных чисел. На сегодняшний день о-минимальность является очень развитой областью в теории моделей с многочисленными применениями не только в математической логике, но и в аналитической и дифференциальной геометрии, теории функций. Здесь нельзя не отметить выдающийся результат А. Вилки, который напрямую связан с теорией функций и геометрией и утверждает, что дополнение конечного числа проекций полиномиально-экспоненциальных равенств и неравенств само является проекцией полиномиально-экспоненциальных равенств и неравенств, иначе говоря, что обогащение упорядоченного поля вещественных чисел экспонентой является имеет модельно полную и о-минимальную теорию.

Общая библиография по о-минимальности составляет уже больше сотни статей. В связи с ограничением на длину библиографического списка мы не можем указать все, отметим лишь одну из последних работ [2].

После этого появились модификации понятия о-минимальности. Профессоры Д. Макферсон, Д. Маркер и Ч. Стейнхорн ввели понятие слабой о-минимальности и доказали, что слабо о-минимальное упорядоченное поле является вещественно замкнутым [3], а затем рассмотрели и другие варианты о-минимальности [4]. О. Белеградек и М. Тайцлин ввели понятие квази-о-минимальности. В этих модификациях сохранялось то, что рассматриваемые структуры являлись линейно упорядоченными.

По другому пути пошли специалисты по теории моделей и математической логике Л. Невельски и Р. Венсель: они рассмотрели о-минимальные булево упорядоченные структуры: оставив неизменным понятие о-минимальности, они отказались от линейности. Их статья вышла в 2001 году в Журнале символической логики. Вторая их статья вышла в 2003 году [5]. Затем А. Гласс, А. Макинтайер, и Ф. Поинт рассмотрели решеточно упорядоченные группы в работе [6]. Р. Клюкер и Е. Линкненг рассматривали версию р-адической минимальности для р-адических полей [7].

И это далеко не полный список работ в этом направлении, что говорит о том, что в теории моделей идет активный поиск методов исследования частично упорядоченных структур.

Заметим, что частично упорядоченные структуры изучают не только с точки зрения теории моделей, но и с точки зрения алгебры. Здесь отметим монографию В. Копытова и Н. Медведева [8], в которой они подвели итоги изучения решеточно упорядоченных групп. Другая монография Т. Блита [9] является более современным изданием по данной тематике.

Как уже было отмечено выше, частично упорядоченные множества играют большую роль в математике. Простой пример: множество положительных чисел со стандартным порядком $a < b$, если $b - a \geq 0$. На множестве натуральных чисел можно ввести частичный порядок и следующим образом: $a < b$, если число a делит без остатка число b. Легко доказать, что такое частично упорядоченное множество является решеткой. Другим классическим примером частично упорядоченных множеств являются булевы алгебры.

Менее тривиальные порядки могут быть введены на множестве перестановок. Хорошим пособием по частично упорядоченным множествам является книга Р. Станлей «Enumerative combinatorics», вышедшая в 1990 году. Мы хотели бы найти приложения частично упорядоченных множеств в теории перманент и теории Йордановых алгебр.

Таким образом, актуальность выбора направления исследований несомненна. Частично упорядоченные структуры являются классическими математическими объектами, для изучения которых в современной математике применяются все более новые и новые методы и подходы.

Другая проблема, для которой необходимы частично упорядоченные структуры, касается теории Йордановых алгебр. Вспомним, что коммутативная алгебра с тождеством $(a,b,a_2) = 0$, где $(a,b,c) = a(bc) - (ab)c$ называется Йордановой. Это тождество имеет мультилинейную форму: $(b,a,cd) + (c,a,db) + (d,a,bc) = 0$.

Эти два тождества эквивалентны, если характеристика основного поля равна 0 или больше, чем 3. В случае характеристики 3 эти тождества не эквивалентны. Мультилинейное тождество более слабое, чем тождество $(a,b,a_2) = 0$. Хорошим пособием по Йордановым алгебрам является книга Якобсона «Structure and representations of Jordan algebras».

Кроме того, было бы интересно приложить имеющийся опыт к исследованию ALIA-алгебр для нахождения формулы полилинейной части.

Все это свидетельствует об актуальности и значимости изучения частично упорядоченных структур.

Научная новизна заключается в том, что раньше либо изменяли понятие о-минимальности внутри класса линейно упорядоченных структур, либо оставляли о-минимальность неизменной, но убирали условие линейности порядка. Мы в проекте предлагаем сделать оба действия: отказаться и от о-минимальности и от линейности. Основным объектом изучения будут слабо о-минимальные частично упорядоченные структуры.

У участников проекта накопился большой опыт в изучении слабо о-минимальных линейно упорядоченных структур, и они могут успешно применить его к исследованию частично упорядоченных структур.

Предполагаемые исследования носят фундаментальный характер, их научная значимость обусловлена применением глубоких, современных результатов математической логики (теории моделей) и алгебры.

Результаты исследований могут применяться для дальнейших изыска
не только в теории моделей и алгебре, но и в таких разделах компьютер
наук, как общая теория реляционных баз данных и формальные методы пр
тирования программного обеспечения.

Обзор предшествующих научных исследований был сделан выше, так
не представляется возможным указать на научную новизну в разрыве от об
предыдущих результатов. Отметим лишь еще раз, что теоретико-модельные
следования частично упорядоченных структур ограничиваются либо о-м
мальностью для решеточно упорядоченных структур, причем, определен
вида, либо вариантами о-минимальности для линейного порядка. Мы в про
обобщаем понятие о-минимальность сразу в двух направлениях: ослабить о
нимальность до слабой о-минимальности и отказаться от линейности поряд

Что касается построения слабых Йордановых алгебр, то как было указ
они не будут входит в известный список классических простых Йордановых
гебр. Построение новых формул для связи произведения перманента с о
делителем основывается на новых результатах одного из участников прое
чем объясняется отличие от научных исследований по данной тематике в ми

2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

2.1 Унарные определимые функции в слабо о-минимальных частично упорядоченных структурах

Понятие слабой о-минимальности было введено Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в статье [11] для линейно упорядоченных структур. В той статье они исследовали свойства слабо о-минимальных структур, формульных унарных функций, топологические свойства формульных подмножеств и свойства слабо о-минимальных линейно упорядоченных групп и полей. Они доказали, что слабо о-минимальная линейно упорядоченная группа является абелевой и делимой, а слабо о-минимальное линейно упорядоченное поле — вещественно замкнутым.

В этом разделе мы рассмотрим обобщение понятия слабой о-минимальности класса линейно упорядоченных структур на класс частично упорядоченных структур, а именно, на класс частично упорядоченных.

Вспомним определение (К. Кудайбергенов): частично упорядоченная структура называется слабо о-минимальной, если любое ее формульное подмножество есть конечное объединение выпуклых множеств.

Пусть $(M, <, f, \ldots)$ будет частично упорядоченной структурой, а $(N, <)$ — линейно упорядоченным множеством, где $f\colon M \to N$ и полная индуцированная структура на M является слабо о-минимальной. То есть, если A — формульное подмножество декартово произведения $M^n \times N^k$ в структуре $(M \cup N, <, f, \ldots)$, то проекция множества A на множество M^n будет формульной в полной индуцированной структуре $(M, <, f, \ldots)$.

Определим следующие формулы:

$$\varphi_{>}(x, a) = (f(x) > f(a))$$
$$\varphi_{<}(x, a) = (f(x) < f(a))$$
$$\varphi_{=}(x, a) = (f(x) = f(a))$$

Пересечение $\varphi_>(M, a)$ с интервалом (a, ∞) формульно, таким образом, существуют минимальные выпуклые компоненты, потому что число выпуклых компонент конечно. То же самое можно сказать и про пересечения множеств $\varphi_<(M, a)$ и $\varphi_=(M, a)$ с интервалом (a, ∞).

Заметим, что конечное число выпуклых компонент этих трех формульных множеств имеют точку a как левую граничную точку.

Определение. Будем говорить, что точка a имеет тип (k, m, n) справа, если существует k выпуклых компонент множества $\varphi_>(M, a)$ с левой граничной точкой a, существует m выпуклых компонент множества $\varphi_<(M, a)$ с левой граничной точкой a и существует n выпуклых компонент множества $\varphi_=(M, a)$ с левой граничной точкой a.

Заметим, что аналогичную процедуру можно провести и для пересечений этих формульных множеств с интервалом $(-\infty, a)$.

Нетрудно написать формулы $\Psi_{k,m,n}(x)$ и $\Theta_{k,m,n}(x)$, которые выражают тот факт, что x типа (k, m, n) справа и типа (k, m, n) слева, соответственно.

Пусть $F_{h,i,j,k,m,n}(x)$ будет конъюнкцией формул $\Theta_{h,i,j}(x)$ и $\Psi_{k,m,n}(x)$.

Лемма 2.1.1 Если $F_{h,i,j,k,m,n}(x)$ истинна на бесконечном интервале и $j > 0$ или $n > 0$, тогда и j, и k равны 0.

Доказательство. Мы рассмотрим только случай $j > 0$, по той причине, что второй случай аналогичен. Пусть $F_{h,i,j,k,m,n}(x)$ истинно на (a,b). Пусть c принадлежит интервалу (a,b). Тогда существует d из (a,b), такой что для любого x из (c, d) имеет место $f(x) = f(c)$. Пусть e будет из (d,c). Тогда $f(x) = f(c) = f(a) = f(e)$. Следовательно, $n > 0$.

Лемма 2.1.2 Если $F_{0,0,j,0,0,n}(x)$ верно на бесконечно интервале (a,b), тогда функция f константа на (a,b).

Доказательство очевидно.

Заметим, что если формула $F_{h,0,0,k,0,0}(a)$ истинна, тогда a — точка локального минимума. Если формула $F_{0,i,0,0,m,0}(x)$ истинна, тогда a — точка локального максимума.

Теорема 2.1.3 Не существует бесконечного интервала I, такого что каждая точка этого интервала есть точка локального минимума (максимума).

Доказательство. Предположим противное, что такая функция f все-таки существует. Повсюду в доказательстве теоремы все рассматриваемые элементы будут лежать в интервале I.

Замечание 2.1.4 Мы можем предположить, что если $f(a) = f(b)$, то a и b несравнимы.

Доказательство замечания 2.1.4. Пусть $E(x, y)$ будет определено равенством $f(x) = f(y)$. Очевидно, что это отношение эквивалентности. Рассмотрим класс $[a] = E(M, a)$. Он не содержит интервал, иначе на этом интервале верна формула $F_{h,i,j,k,m,n}(x)$, где $j > 0$ и $k > 0$.

Существует минимальный выпуклый компонент класса $[a]$, по той причине, что любое конечное частично упорядоченное множество имеет минимальный элемент. Более того, этот выпуклый компонент есть точка. Пусть $G(x) = (x$ — минимальный элемент класса $[x])$. Заметим, что множество $G(M)$ бесконечно. Если множество $G(M)$ не содержит интервал, то существует минимальная точка a множества $G(M)$ как его минимальный выпуклый компонент. Поскольку I открытое, постольку существует элемент b из I, такой что $b < a$. Тогда любой минимальный элемент класса $[b]$ будет меньше элемента a, что дает противоречие.

Таким образом, для упрощения обозначений, но не ограничивая общности, мы можем предположить, что $G(M) = I$. Заметим, что минимальные элементы любого частично упорядоченного множества несравнимы.

Обозначение: $U_a = \{ x > a : f(y) > f(x)$ для любого y из $(a, x]\}$, объединенное с множеством $\{ x < a : f(y) > f(x)$ для любого y из $[x, a)\}$ и множеством $\{a\}$.

То есть элемент a является точкой глобального минимума на множестве U_a, а множество U_a является максимальным множеством с этим свойством, содержащим элемент a.

Обозначим: а $<_U b$, если и только если U_a содержит b, и $a \lozenge b$, если и только если $a = b$ или $a <_{\mathrm{U}} b$, или $a <_U b$.

Замечание 2.1.5 Множество U_a выпуклое. Кроме того, если $a \neq b$, то имеет место неравенство $U_a \neq U_b$.

Доказательство очевидно.

Свойство 1 Если пересечение множеств U_a и U_b не пусто, то либо U_a является подмножеством множества U_b, либо U_b — подмножеством множества U_a, для любых a, b, удовлетворяющих неравенству $a < b$.

Доказательство. Пусть пересечение множеств U_a и U_b не пусто и, кроме того, $a < b$. Предположим также, что $f(a) < f(b)$. Если b лежит в U_a, то U_b является подмножеством множества U_a.

Пусть b не лежит в множестве U_a. Тогда существует такой элемент d, что имеют место неравенства $a < d < b$ и $f(d) < f(a) < f(b)$. Поскольку элемент d лежит в множестве U_b, постольку $U_a < d < U_b$. Тогда пересечение $U_a \cap U_b$ пусто, что приводит нас к противоречию.

Свойство 2 Отношение $<_U$ представляет собой строгий частичный порядок.

Доказательство. Легко проверить, что асимметричность и транзитивность выполняются для $<_U$.

Свойство 3 Для любой цепи $a_0 <_U a_1 <_U \ldots <_U a_n$ существует $a_{n+1} >_U a_n$.

Доказательство. В качестве элемента a_{n+1} мы можем взять любой элемент множества U_b, где $b = a_n$.

Свойство 4 Пусть $b <_U a$, $c <_U a$ и $b < c$. Тогда $b \lozenge c$.

Доказательство. Поскольку $b <_U a$, $c <_U a$, постольку a лежит в $U_b \cap U_c$, а в силу свойства 1 либо U_b есть подмножество для U_c, либо U_c есть подмножество для U_b.

Свойство 5 Для любого элемента a множество $C_a = \{x : x <_U a\}$ не содержит бесконечной $<_U$-цепи.

Доказательство. Предположим противное, что множество C_a содержит бесконечную цепь. Тогда множество C_a содержит бесконечный интервал J. Пусть d лежит в J, а m, n, лежащие в $J \cap U_d$, удовлетворяют условию $m < d < n$.

В силу свойства 4 имеет место $m \lozenge n$, скажем, $m <_U n$. Тогда n лежит в U_m. Поскольку множество U_m выпукло, постольку элемент d лежит в U_m, то есть $f(m) > f(d)$, что приводит к искомому противоречию.

Свойство 6 Порядок $<_U$ дискретный.

Свойство 7 Для любых a и c, удовлетворяющих неравенству $c <_U a$, существует такой элемент b, что $c <_U b$ и $(a \lozenge b)$.

Доказательство. В качестве b мы можем взять любой такой элемент из множества U_c, что если $a > c$, то $b < c$, а если $a < c$, то $b > c$.

Обозначение: K есть множество всех минимальных относительно порядка $<_U$ элементов, а $S(a) = \{x : a <_U x$ и не существует y, такого что $a <_U y <_U x\}$.

Свойство 8 Множества $S(a)$, где элемент a пробегает $\operatorname{dom} f$, образуют равномерное разбиение множества $(\operatorname{dom} f) \setminus K$.

Доказательство. Если $S(a) \cap S(b)$ не пусто, то данное пересечение содержит такой элемент c, что $a <_U c$, $b <_U c$. Тогда либо $a <_U b$, либо $b <_U a$. В итого получаем, что либо $a < b < c$ и c не лежит в $S(a)$, либо $b < a < c$ и c не лежит в $S(b)$, что дает противоречие.

Свойство 9 Множество K содержит минимальный элемент.

Доказательство. В противном случае множество K содержит открытый бесконечный интервал I. Пусть b лежит в I, а элемент c — в $U_b \cap I$. Тогда получаем, что $c >_U b$, противоречие.

Свойство 10 Для каждого a имеет место то, что $S(a)$ есть подмножество множества U_a.

Свойство 11 Множество $S(a)$ конечно при любом a.

Доказательство аналогично доказательству свойства 9.

По разбиению $\{K, S(a)$, где a пробегает $\operatorname{dom} f\}$ мы строим отношение эквивалентности $E(x, y)$. Заметим, что каждый E-класс содержит минимальный элемент относительно порядка $<_U$. Свойства 9 и 11 влекут, что E — отношение эквивалентности с бесконечным числом конечных классов.

Пусть X состоит из минимальный элементов E-классов относительно порядка $<$. Тогда X бесконечно. Пусть U будет максимальным выпуклым компонентом множества X. Пусть элемент a лежит в U. В силу свойств 7 и 3 существует $b <_U a$, такой что b не лежит в X, но в то же время, $b > a$.

Пусть c будет в U_b, причем $c > b$. Поскольку множество $S(c)$ не пусто, оно содержит некоторый элемент d из X в силу свойства 3, кроме того, $S(c) > b$ в силу свойства 10. Тогда $d > b > a$, оба элемента a и d принадлежат X, но b не лежит в X, что приводит к противоречию.

Теорема доказана.

2.2 О коммутативности ро-максимальной упорядоченной группы

В работе [12] был построен пример неравномерно слабо о-минимальной структуры, то есть слабо о-минимальной структуры, чья элементарная теория не является слабо о-минимальной, то есть, существует элементарное расширение этой структуры, которое уже не является слабо о-минимальным. Но так как в исходной структуре выпуклые компоненты $\{A_1, \dots, A_n\}$ любого формульного подмножества A образуют конечный порядок, то в элементарном расширении семейство выпуклых компонент $\{B_i : i \in I\}$, где $B_i < B_j$ тогда и только тогда, когда $i < j$, будет иметь максимальные и минимальный элементы.

Но для начала вспомним основные факты, касающиеся частично упорядоченных групп. Полугруппа S называется частично упорядоченной или частично упорядоченной полугруппой, если на множестве ее элементов определен частичный порядок $\leq$, который взаимосвязан с левым и правым умножением:

$$a \leq b \text{ влечет, что } xay \leq xby \text{ для любых } x, y \in S.$$

Хороший обзор по частично упорядоченным группам дан в [13–14].

Теперь приведем необходимые для нашего исследования свойства частично упорядоченных групп.

Предложение 2.2.1 [13] Пусть G будет частично упорядоченной группой и пусть $a, b \in G$. Тогда элементы a и b имеют наименьшую верхнюю грань $a \vee b$ в G тогда и только тогда, когда они имеют наибольшую нижнюю грань $a \wedge b$; это выполняется тогда и только тогда, когда a^{-1}иb^{-1} имеют наименьшую верхнюю грань.

Следствие 2.2.2 [13] Следующие условия эквивалентны для частично упорядоченной группы G.

(i) G— верхняя полурешетка относительно $\leq$;

(ii) G— нижняя полурешетка относительно $\leq$;

(iii) $a \wedge 1$ существует для любого $a \in G$;

(iv) $a \vee 1$ существует для любого $a \in G$;

(v) $a \wedge b$ существует для любых a, $b \in G^+$;

(vi) $a \vee b$ существует для любых a, $b \in G^+$;

(vii) для любых a, $b \in G^+$существует $c \in G^+$, такой что $G^+a \cap G^+b = G^+c$.

Если группа G удовлетворяет хотя бы одному (значит, всем) из этих условий, то мы говорим, что G — решеточно упорядоченная группа.

Теорема 2.2.3 [13] Пусть G— решеточно упорядоченная группа относительно $\leq$, тогда G— дистрибутивная решетка относительно $\leq$.

Вспомним, что два элемента a и b решеточно упорядоченной группы G называются ортогональными, если $a \wedge b = 1$.

Ортогональные элементы встречаются достаточно часто в решеточно упорядоченных группах и играют важную роль в таких группах. В следующем предложении мы приводим их основные свойства.

Предложение 2.2.4 [13] Пусть G— решеточно упорядоченная группа и пусть a, b, $c \in G$.

(i) если $a \wedge b = 1$, то $ab = ba$;

(ii) если $a \wedge b = 1$ и $c \geq 1$, то $a \wedge bc = a \wedge c$;

(iii) $(a \vee 1) \wedge (a^{-1} \vee 1) = 1$;$a \vee a^{-1} = (a \vee 1)(a^{-1} \vee 1)$

(iv) $(a \vee 1)^n = (a^n \vee 1)$; $(a \wedge 1)^n = (a^n \wedge 1)$;

(v) $a^n \geq 1$ влечет, что $a \geq 1$.

Теорема 2.2.5 [13] Пусть G — абелева группа. Тогда G может быть решеточно упорядочена (линейно упорядочена) тогда и только тогда, когда G без кручения.

Теперь мы перейдем к изучению слабо о-минимальных решеточно упорядоченных групп.

Вспомним, что интервалом (a, b) для $a < b$ в частично упорядоченном множестве M называется множество все таких элементов c, что $a < c < b$.

Будем называть подмножество A частично упорядоченного множества M выпуклым, если для любых $a, b \in A$, если $a < b$, то интервал (a, b) является подмножеством множества A. Частично упорядоченная структура $(M, \leq, \ldots)$ называется слабо о-минимальной, если любое ее формульное подмножество является конечным объединением выпуклых множеств.

Определение 2.2.6 Частично упорядоченная структура называется ро-максимальной, если у любого ее формульного подмножества семейство выпуклых компонент имеет как минимальный, так и максимальный элементы.

Легко заметить, что слабо о-минимальная частично упорядоченная структура является ро-максимальной. Кроме того, любая структура, элементарно эквивалентная ро-максимальной структуре, сама является ро-максимальной структурой. То есть данное свойство элементарно. Целью данного параграфа является исследование ро-максимальных упорядоченных групп.

Повсюду в данном параграфе под структурой $\mathrm{G} = (G, <, \cdot, 1, \ldots)$ я буду подразумевать ро-максимальную частично упорядоченную группу.

Лемма 2.2.7 Пусть $(G, \leq, \cdot, e)$ будет ро-максимальной частично упорядоченной группой. Пусть H— формульная подгруппа группы G. Тогда для любого $h \in H$, если $h > e$, то интервал (e, h) лежит вH.

Доказательство: Пусть $h \in H$ — положительный элемент. Предположим противное, что существует такой элемент $g \in G$, что $g \in (e, h)$, но в то же время элемент g не лежит в H. Поскольку элемент h положителен, он бесконечного порядка, значит $h, h^2, h^3, \ldots, h^n, \ldots$ — все различны.

В силу ро-максимальности имеем представление $H = A_1 \cup \ldots \cup A_s$, где множества A_c выпуклы. Тогда в силу принципа Дирихле существует некоторый индекс k, такой что A_k содержит хотя бы два элемента h^n и h^mс условием $n<m$. Тогда (h^n, h^m) — подмножество для A_k, потому что множество A_kвыпукло.

С другой стороны, $e<g<h$, значит $h^n < h^n \cdot g < h^{n+1} \leq h^m$. Следовательно, $h^n \cdot g \in A_k$ и $h^n \cdot g \in H$. Но поскольку $h^{-n} \in H$, постольку $g = h^{-n} \cdot h^n \cdot g \in H$, что нелепо.

Лемма 2.2.8 Пусть $(G, \leq, \cdot, e)$ — ро-максимальная частично упорядоченная группа. Тогда любые два положительных элемента коммутируют, то есть, если $g_1 > e, g_2 > e$, то $g_1 g_2 = g_2 g_1$.

Доказательство: Рассмотрим централизатор $C(g)$ некоторого элемента $g \in G$. Он определим формулой $C(x)=(x \cdot g=g \cdot x)$. Очевидно, что централизатор $C(g)$ является подгруппой.

Случай 1) $g_1 < g_2$.Тогда$g_1 \in (e, g_2) \subseteq C(g)$ по лемме 2.2.7. Следовательно, $g_1 \in C(g_2)$ и $g_1 g_2 = g_2 g_1$.

Случай 2) $g_2 < g_1$ аналогичен.

Случай 3) g_1 и g_2 несравнимы. Так как $e < g_1$, получаем, что $g_2 < g_1 g_2$. В силу случая 1 элементы g_2 и $g_1 g_2$ коммутируют, то есть $g_2(g_1 g_2) = (g_1 g_2) g_2$.

Тогда $g_2 g_1 g_2 = g_1 g_2 g_2$и, сокращая g_2 справа, получаем, что $g_2 g_1 = g_1 g_2$.

Лемма 2.2.9 Пусть $(G, \leq, \cdot, e)$ — ро-максимальная частично упорядоченная группа. Тогда любые сравнимые с e элементы коммутируют.

Доказательство. Пусть g_1, g_2сравнимы с e:

1) $g_1 > e, g_2 > e$ следует из леммы 2.2.8.

2) $g_1 < e, g_2 > e$. Тогда $g_1^{-1} g_2 = g_2 g_1^{-1}$, по той причине, что $g_1^{-1} > e$. Тогда $g_2 g_1 = g_1 g_2$.

3) $g_1 > e, g_2 < e$ подобен случаю 2.

4) $g_1 < e, g_2 < e$ следует из случая 1.

Теорема 2.2.10 Пусть $(G, \leq, \cdot, e)$ — ро-максимальная решеточно упорядоченная группа. Тогда G абелева.

Доказательство. Пустьg_1, $g_2 \in G$. Пусть $h_1 = e \vee g_1$, $h_2 = e \vee g_2$. Тогда оба элемента h_1 и h_2 положительны, значит в силу леммы 2.2.8 $h_1 h_2 = h_2 h_1$.

Пусть

$$f_1 = e \wedge g_1, f_2 = e \wedge g_2$$

$$f_i = e \wedge g_i = e(e \vee g_i)^{-1} g_i = h_i^{-1} \cdot g_i$$

$$g_i = h_i \cdot f_i$$
$$g_1 g_2 = h_1 f_1 h_2 f_2$$

Так как h_1, h_2, f_1, f_2 сравнимы с e, все они коммутируют. Тогда

$$g_1 g_2 = h_1 f_1 h_2 f_2 = h_2 f_2 h_1 f_1 = g_2 g_1$$

Теорема доказана.

Теперь мы будем использовать аддитивную запись для групповой операции.

Теорема 2.2.11 Пусть $(G, \leq, +, 0)$ — ро-максимальная решеточно упорядоченная группа. Тогда G делимая.

Доказательство. Пусть$g \in G$. Требуется доказать, что для каждого положительного числа n существует такой элемент $h \in G$, что $nh = g$, то есть, что элемент g является n-делимым. Предположим противное, что существует такой элемент g, который не является n-делимым для некоторого n.

Случай 1. Элемент g положителен, то есть $g > 0$. Рассмотрим подгруппу nG. Она определима формулой $\exists y(ny = x)$. В силу ро-максимальности она представима в виде объединения выпуклых множеств $K_1, \ldots, K_m$.

Пусть h лежит в nG. Рассмотрим следующую последовательность: $a_k = h + kg$. Так как элемент g положителен, эта последовательность возрастающая. Заметим, что a_k лежит в nG тогда и только тогда, когда k делится на n. Таким образом, бесконечно много элементов этой последовательности лежат в nG. Поскольку число n конечно, существует такой индекс j, что для некоторых $0<s<q$ верно, что оба элемента a_{sn} и a_{qn} лежат в K_j. Тогда весь интервал (a_{sn}, a_{qn}) лежит в K_j, следовательно, и в nG. Но a_{sn+1} принадлежит этому интервалу, но он не является n-делимым, противоречие.

Случай 2. Пусть элемент g отрицателен. Тогда элемент $-g$ положителен и также не является n-делимым. Приходим к случаю 1.

Случай 3. Элемент g несравним с 0, но любой сравнимый с 0 элемент является n-делимым. В силу предложения 2.2.1 имеет место следующее равенство $g \vee 0 = g - (g \wedge 0) + 0 = g - (g \wedge 0)$. Или, что эквивалентно, имеет место равенство $g = (g \wedge 0) + (g \vee 0)$. Но последние два элемента сравнимы с 0, поэтому они делятся на n, так же как и их сумма, которая равна g. Опять получили противоречие.

Теорема 2.2.12 Пусть $(G, \leq, +, 0)$ — ро-максимальная решеточно упорядоченная группа. Тогда G плотная.

Доказательство. Пусть $g \in G$ положителен. Тогда по теореме 2.2.10 существует такой элемент $h \in G$, что $2h = g$. В силу предложения 2.2.4 элемент h положителен. Таким образом, $0 < h$ влечет, что $0 + h < h + h$, то есть, $h < 2h$. Следовательно, не существует минимального положительного элемента.

Пусть $a < b$ — два элемента из G. Пусть $2h = b - a$. Так как $0 < b - a$, то в силу предложения 2.2.4 верно, что $0 < h$. Тогда $a < a + h < a + h + h = b$. Таким образом, мы получили, что порядок плотный.

2.3 Различные способы обобщения слабой о-минимальности на частичные порядки

Заметим, что данное выше определение слабо о-минимальной решеточно упорядоченной структуры базируется на определении выпуклого множества. Но у данного определения есть недостаток: любая антицепь будет выпуклым множеством. Таким образом, если частичный порядок тривиален, то есть совпадает с равенством, то любая структура с тривиальным частичным порядком будет слабо о-минимальной. А как известно из общей методологии науки, для получения интересных результатов необходимо ограничивать рассматриваемый класс объектов. По этой причини мы ниже приводим еще одно определение выпуклого множества.

Множество, которое можно получить при помощи объединения конечного или бесконечного семейства вложенных интервалов вида (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ назовем сильно выпуклым изнутри.

Множество, которое можно получить при помощи конечного или бесконечного пересечения интервалов вида (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ назовем сильно выпуклым снаружи.

Множество назовет сильно выпуклым, если оно сильно выпукло снаружи или изнутри.

Заметим, что для линейных порядков понятия сильной выпуклости снаружи и сильной выпуклости изнутри совпадают с понятием выпуклости.

Для частичных порядков это не так, о чем говорят следующие теоремы.

Теорема 2.3.1 Существует частично упорядоченная структура, в котором есть сильно выпуклое снаружи множество, которое при этом не является сильно выпуклым изнутри.

Теорема 2.3.2 Существует частично упорядоченная структура, в котором есть сильно выпуклое изнутри множество, которое при этом не является сильно выпуклым снаружи.

Теорема 2.3.3 Любое сильно выпуклое снаружи или изнутри множество является выпуклым, в то время как обратное не верно.

Если теперь мы определим понятие слабой о-минимальности как любое формульное подмножество является конечным объединением сильно выпуклых множеств, то это понятие будет более сильным, чем стандартное понятие слабой о-минимальности.

В частности доказана следующая теорема.

Теорема 2.3.4 В слабо о-минимальной структуре (в сильном смысле) не существует бесконечной антицепи.

Напомним, что антицепью называют множество, состоящее из попарно несравнимых элементов. Для линейных порядков это понятие бессмысленно, так как в линейном порядке любые два элемента сравнимы. Для частичных порядков это определение имеет смысл.

2.4 Формула полилинейной части ALIA-алгебр

Алгебру A называют дуальной к алгебре B, если тензорное произведение A и B является алгеброй Ли. ALIA-алгебры задаются тождеством:

$$a*(b*c - c*b)+b*(c*a- a*c)+c*(a*b - b*a)=0$$

Мы пользуемся следующим соотношением Гинзбурга-Капранова для экспоненциальных рядов Гильберта дуальных алгебр: $-A(-B(z))^{-1} = z$.

Учитывая, что $B(z)=z+z^2+z^3/6$, получаем уравнение на $A(z)=y$:

$$1/6y^3 - y^2+y=z$$

Соответственно, формула на коэффициенты $c_n= d_n / (n!)$ будет следующей:

$$c_n = \sum_{i+j=n} c_i * c_j - \frac{1}{6} \sum_{i+j+k=n} c_i * c_j * c_k$$

Теорема 1 Для полилинейной части ALIA-алгебр $d(n)$ верна следующая формула: $d(n) =3(n- 3/2)d(n - 1)+9/4(n - 5/3)(n - 7/3)d(n- 2)$.

Доказательство: Воспользуемся математической индукцией по n.

Основание индукции: $d(1)=1$, $d(2)=2$, $d(3)=11$, тогда имеем:

$$11=3(3 - 3/2)*2+9/4(3 - 5/3)(3 - 7/3)*1$$

Шаг индукции: Пусть утверждение верно для j, $k<n$. Покажем, что утверждение верно для n:

$$d(n - 1) =3(n - 1 - 3/2)d(n - 2)+9/4(n - 1 - 5/3)(n - 1 - 7/3)d(n - 3)$$

$$c_n = \sum_{i+j=n} c_i * c_j - \frac{1}{6} \sum_{i+j+k=n} c_i * c_j * c_k$$

$$c_n = \frac{d_n}{n!}$$

Для j, $k<n$ верно:

$$d_j = 3(j - 3/2)d_{j-1} + 9/4(j - 5/3)(j - 7/3)d_{j-2}$$

$$d_k = 3(j - 3/2)d_{k-1} + 9/4(k - 5/3)(k - 7/3)d_{k-2}$$

$$d_n = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!\,j!} d_i * d_j - \frac{1}{6} \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!\,j!\,k!} d_i * d_j * d_k$$

$$d_n = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!\,j!} d_i * (3(j - \frac{3}{2})d_{j-1} + \frac{9}{4}(j - \frac{5}{3})(j - \frac{7}{3})d_{j-2}) -$$

$$- \frac{1}{6} \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!\,j!\,k!} d_i * d_j * (3(k - \frac{3}{2})d_{k-1} + \frac{9}{4}(k - \frac{5}{3})(k - \frac{7}{3})d_{k-2}$$

Используя полученные соотношения и свойствами факториала, получаем

$$d(n) = 3(n - 3/2)d(n-1) + 9/4(n - 5/3)(n - 7/3)d(n-2)$$

Как следствие, получаем, что производящая экспоненциальная функция для полилинейной части ALIA-алгебр будет следующей:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(n)}{n!} z^n = 2sh\left(\frac{z}{2}\right) * \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{0,25}$$

3 ОБОБЩЕНИЕ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Одна из важнейших проблем в теории моделей и алгебре — описание свойств алгебраических структур, среди которых важное место занимают частично упорядоченные структуры. Например, множество всех (некоторых) подмножеств некоторого множества может быть естественным образом частично упорядоченно по включению. Частичный порядок возникает и на множестве натуральных чисел, если упорядочить их относительно делимости одного числа на другое. Естественно, что при этом возникают задачи описания теоретико-модельных и алгебраических свойств таких структур. Но общая теория частично упорядоченных структур в теории моделей еще развита слабо. Целью данного проекта было развитие новых подходов к изучению частично упорядоченных структур в теории моделей. Также теоретико-модельные свойства упорядоченных структур используются для нужд общей теории реляционных баз данных.

В исследовании упорядоченных структур в рамках данной научно-исследовательской работы был достигнут определенный успех. Учитывая полученные результаты, можно утверждать, что поставленная задача решена полностью. И действительно, была доказана локальная монотонность и непрерывность одноместных определимых функций, определимых в частично упорядоченных группах. Была доказана коммутативность ро-максимальных частично упорядоченных групп. Было предложено новое понятие выпуклого множества для частичных порядков. Была построена формула полилинейной части для ALIA-алгебры.

Эти результаты важны и интересны сточки зрения математической логики и алгебры, более того, они могут иметь приложения для исследований методов моделирования поведения сложных систем, общей теории реляционных баз данных. Это подтверждается приглашениями и участием в международных конференциях.

Все вышеперечисленное указывает на актуальность, востребованность и перспективность исследований в данном направлении, в изучении алгебраических и теоретико-модельных свойств частично упорядоченных структур, что обосновывает необходимость дальнейших исследований.

В плане научно-организационной деятельности отметим следующее:

Вербовский В.В. является членом совета молодых ученых при Фонде Первого Президента — Лидера Нации Республики Казахстан, ответственным за секцию физико-математических наук.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования носили чисто теоретический, фундаментальный характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейших исследований в данной области. Уровень проведенных исследований соответствует международным стандартам, о чем свидетельствует полученные результаты, уровень журналов, в которых опубликованы результаты, уровень конференций, на которых были обсуждены результаты, характер и уровень международного сотрудничества.

Оценка полноты поставленных задач

По заданию 1 календарного плана «Исследование локальной монотонности унарных функций, определимых в слабо о-минимальных решеточно упорядоченных группах» были получены результаты, приведенные в разделе 2.1.

По заданию 2 календарного плана «Исследование непрерывности унарных функций, определимых в слабо о-минимальных решеточно упорядоченных группах» были получены результаты, приведенные в разделе 2.2.

По заданию 3 календарного плана «Исследование локальной монотонности унарных функций, определимых в слабо о-минимальных частично упорядоченных группах» были получены результаты, приведенные в разделе 2.1.

По заданию 4 календарного плана «Исследование непрерывности унарных функций, определимых в слабо о-минимальных частично упорядоченных группах» были получены результаты, приведенные в разделе 2.2.

По этим заданиям были опубликованы работы:

1) Abubakirova G.P., Mukantayeva F.K., Verbovskiy V.V. On some generalizations of weak o-minimality on partial orders // Известия НАН РК, серия физико-математическая. — 2013, № 5. — С. 193–196.

2) Abilova G.S., Mukantayeva F.K., Verbovskiy V.V. Some properties of functions definable on partially ordered weakly o-minimal structures // Известия НАН РК, серия физико-математическая. — 2013, № 6. — С. 136–139.

3) Kuralbayev K., Oraz G., Verbovskiy V.V. On commutativity of po-maximal lattice ordered groups // Известия Национальной Академии Наук Республики Казахстан, — 2013. — № 4. С. 80–82.

Кроме того, была получена формула полилинейной части ALIA-алгебр, что выходит за рамки календарного плана (раздел 2.4).

По данной теме была опубликована статья:

1) Туленбаев К. М., Йылдырай А., Узунташ Р., Кудайбергенова Н. А. Формула полилинейной части ALIA-алгебр // Известия Академии Наук. — 2013, №3. — С. 116–118.

Таким образом, поставленные задачи выполнены и перевыполнены.

Выводы

Полученные результаты могут быть использованы для чтения спецкурсов в высших учебных заведения по специальности «математика», а так же для дальнейших исследований в данной области.

Оценка технико-экономической эффективности внедрения не имеет смысла, так как результаты носят фундаментальный характер.

Оценка научно-технического уровня в сравнении с лучшими достижениями в данной области.

Для различных обобщений о-минимальности ведутся исследования по описанию формульных множеств и функций. Здесь мы получили продвижение для слабой о-минимальности для частичных порядков.

Данные результаты соответствуют высокому международному уровню.

СПИСОКИСПОЛЬЗОВАННЫХИСТОЧНИКОВ

1 PillayA., Steinhorn Ch. Definable sets in ordered structures.1 // Transactions of The American Mathematical Society. — 1986. — V. 295. — C. 565–592.

2 Fornasiero A., Rifo E.V. Hausdorff measure on o-minimal structures // The Journal of Symbolic Logic. — 2012. — V. 77, I. 2. — P. 631–648.

3 Macpherson D., Marker D., Steinhorn Ch. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society. — 2000. — V. 352. — P. 5435–5483.

4 Macpherson D., Steinhorn Ch. On Variants of o-Minimality // Annals of Pure and Applied Logic. — 1996. — V. 79(2). — P. 165–209.

5 Wencel R. Definable Sets in Boolean Ordered O-Minimal Structures. II // The Journal of Symbolic Logic. — 2003. — V. 68, No. 1. — P. 35–51.

6 Glass A. M. W., Macintyre A., Point F. Free abelian lattice-ordered groups // Annals of Pure and Applied Logic. — 2005. — V. 134, N. 2–3. — P. 265–283.

7 Cluckers R., Leenknegt E. A version of p-adicminimality // The Journal of Symbolic Logic. — 2012. — V. 77, I. 2. — P. 621–630.

8 Kopytov V.M., Medvedev N.Ya. The Theory of Lattice-Ordered Groups / Springer, 1994. — 400 p.

9 Blyth T.S. Lattices And Ordered Algebraic Structures / Springer, 2005 — 303 p.

10 Carlos Martins da Fonseca. An identity between the determinant and the permanent of Hessenberg-type matrices // Czechoslovak Mathematical Journal. — 2011. — V. 61, N. 4. — P. 917–92.

11 Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn Ch. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society. — 2000. — V. 352. — P. 5435–5483.

12 Verbovskiy V. Non-uniformly weakly o-minimal group // Алгебра и теория моделей 3, сборник статей под ред. А. Г. Пинуса и К. Н. Пономарева. — Новосибирск, 2001. — С. 136–145.

13 Blyth T.S. Lattices and Ordered Algebraic Structures, Springer, 2005. — 355 p.

14 Fuchs L. Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963. — 305 p.

15 KokorinA.I., KopytovV.M. Fully ordered groups / Israel Program Sci. Transl., 1974. — 205 p.

16 Кудайбергенов К.Ж. Обобщение о-минимальности на частичные порядки // Математические труды. — 2012. —Т. 15, № 1. — С. 86–108.

17 Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic. — 1998. — V. 63. — P. 1511–1528.

18 BaizhanovB.S.Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic. — 2001. — V. 66. — P. 1382–1414.

19 Herwig B., Macpherson H.D., Martin G., Nurtazin A., Truss J.K. On $\aleph_0$–categorical weakly o-minimal structures // Annals of Pure and Applied Logic. — 2000. — V. 101. — P. 65–93.

20 Macpherson D., Steinhorn Ch. On Variants of o-Minimality // Annals of Pure and Applied Logic. — 1996. — V. 79(2). — P. 165–209.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1) Туленбаев К. М., Йылдырай А., Узунташ Р., Кудайбергенова Н. А. Формула полилинейной части ALIA-алгебр // Известия Академии Наук. — 2013, №3. — С. 116–118.

2) Abubakirova G.P., Mukantayeva F.K., Verbovskiy V.V. On some generalizations of weak o-minimality on partial orders // Известия НАН РК, серия физико-математическая. — 2013, № 5. — С. 193–196.

3) Abilova G.S., Mukantayeva F.K., Verbovskiy V.V. Some properties of functions definable on partially ordered weakly o-minimal structures // Известия НАН РК, серия физико-математическая. — 2013, № 6. — С. 136–139.

4) Kuralbayev K., Oraz G., Verbovskiy V.V. On commutativity of po-maximal lattice ordered groups // Известия Национальной Академии Наук Республики Казахстан, — 2013. — № 4. С. 80–82.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН

Шифр задания, этапа	Наименование работ по Договору и основные этапы его выполнения	Срок выполнения		Ожидаемый результат
		начало	окончание	
1	Исследование локальной монотонности унарных функций, определимых в слабо о-минимальных решеточно упорядоченных группах.	В течение года	В течение года	Монотонность унарных функций (определимых в слабо о-минимальных решеточно упорядоченных группах).
2	Исследование непрерывности унарных функций, определимых в слабо о-минимальных решеточно упорядоченных группах.	В течение года	В течение года	Непрерывность унарных функций (определимых в слабо о-минимальных решеточно упорядоченных группах).
3	Исследование локальной монотонности унарных функций, определимых в слабо о-минимальных частично упорядоченных группах.	В течение года	В течение года	Локальная монотонность унарных функций (определимых в слабо о-минимальных частично упорядоченных группах).
4	Исследование непрерывности унарных функций, определимых в слабо о-минимальных частично упорядоченных группах.	В течение года	В течение года	Непрерывность унарных функций (определимых в слабо о-минимальных частично упорядоченных группах).