9 А.В.Фарков. Математические олимпиады в школе 5-11классы-М.Айрис-пресс.2005.-176с. Епишева О.Б. Технология обучения математике на основе деятельностного подхода. М. «Просвещение», 2003 г.

УДК 519.6

Иванов А.И.

к.ф-м.н., ст.преп., Университет имени Сулеймана Демиреля, Каскелен, Казахстан

e-mail: alexandr.ivanov@sdu.edu.kz

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ ПОЛИНОМА ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Аннотация. В данной статье представлено продолжение начатой ранее работы над разработкой методов аналитического нахождения корней полиномов, отличающихся от использованных ранее, и которые значительно упрощают как саму проблему нахождения корней полиномов, так и проблему нахождения собственных векторов и собственных значений матриц. Для нормальных вещественных матриц третьего порядка получена формула, по которой находятся собственные значения (корни характеристического многочлена) данных матриц.

Ключевые слова: собственное значение, собственный вектор, матрица Фробениуса (сопровождающая матрица).

В предыдущих работах[2] на частных примерах было показано, как хорошо известные взаимосвязи проблем отыскания корней полиномов и нахождения собственных значений матриц[1] могут использоваться для построения новых методов решения этих задач. Однако особый интерес представляют результаты использования этих методов в общем случае. Получение такого типа результатов, и является главной задачей как данной работы, так и планируемых нами исследований.

Рассматриваются невырожденные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, a_{ij} \epsilon\ R\ ,i,j=\overline{1,3}\ ;$$

Для каждой такой матрицы по известному правилу [1] находится характеристический многочлен, в общем виде выражаемый формулой:

$$f(\lambda) = \lambda^3 - a_1\lambda^2 - a_2\lambda - a_3, \qquad (1)$$

которому соответствует так называемая сопровождающая матрица (матрица Фробениуса)

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

имеющая тот же характеристический многочлен, что и матрица A, и, таким образом, матрицы A и F являются подобными, т.е. существует такая невырожденная действительная матрица C, для которой справедливо равенство A = C*F* C^{-1}. Следовательно, если нам задан полином (1), то найдётся такая матрица C, по которой находятся матрицы подобные F и имеющие одинаковые характеристические многочлены (одинаковые собственные значения), но разные, в общем случае, собственные вектора. Известно, что, если матрица допускает базис из собственных векторов, то она в таком базисе принимает диагональный вид с собственными значениями (корнями характеристического полинома) на диагонали (этим свойством обладают нормальные матрицы), а более общая структура называется нормальной жордановой формой, и при этом исходная матрица будет подобна матрице с нормальной жордановой формой. Мы ограничимся нормальными матрицами, однако, из-за сложности построения базиса из собственных векторов, мы будем использовать свойства координат каких-либо из собственных векторов, которые, вообще говоря, являются искомыми, но косвенно связанными с элементами рассматриваемых матриц (для простоты ограничимся рассмотрением сопровождающих матриц). Именно благодаря этим свойствам появляется возможность выражать аналитически собственные значения матрицы.

Далее, полагая матрицу преобразования равной

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \frac{1}{c_3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ c_i \epsilon R,\ i=\overline{1,3}, \qquad (3),$$

находим

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{c_3} & -c_1 & -\frac{c_2}{c_3} \end{pmatrix},\ c_i \epsilon R,\ i=\overline{1,3}.$$

Применяя это преобразование к сопровождающей матрице (2), получаем

$$\widehat{F} = C * F * C^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{f_1} & \widehat{f_2} & \widehat{f_3} \\ \widehat{f_4} & \widehat{f_5} & \widehat{f_6} \\ \widehat{f_7} & \widehat{f_8} & \widehat{f_9} \end{pmatrix},$$

где $\widehat{f_1} = \frac{c_2}{c_3} + a_1;\ \widehat{f_2} = {c_3}^2 a_3 - c_1 c_2 - c_1 c_3 a_1;\ \widehat{f_3} = c_1 + c_3 a_2 - \frac{{c_2}^2}{c_3} - c_2 a_1,$

$\widehat{f_4} = 0, \widehat{f_5} = 0,\ \widehat{f_6} = \frac{1}{c_3}, \widehat{f_7} = \frac{1}{c_3},\ \widehat{f_8} = -c_1, \widehat{f_9} = \frac{-c_2}{c_3}.$

Пусть λ_i – корни (1)(собственные значения матрицы F) , $(i = \overline{1,3},\ \lambda_i \epsilon \mathbb{C})$, а x_i, соответствующие этим собственным значениям собственные вектора ($x_i \epsilon\ \mathbb{C}^3, x_i \neq 0, i = \overline{1,3},$), т.е. для каждого λ_i выполняется равенство $F\ x_i = \lambda_i x_i$, где каждый собственный вектор связан со своим собственным значением равенством [1]:

$$x_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \end{pmatrix}, \quad i=\overline{1,3} \qquad (4)$$

Матрица $\widehat{F}$, связанная с F преобразованием подобия C, будет иметь те же собственные значения что и F, однако соответствующие этим собственным значениям собственные вектора (обозначим их через y_i) будут находиться по формуле[1]: $y_i = Cx_i$ $(i=\overline{1,3})$.

Будем рассматривать для удобства лишь один из собственных векторов, и индекс не будем использовать. Нам достаточно рассмотреть соотношения координат собственного вектора преобразованной матрицы $\widehat{F}$, теперь мы его запишем как $y = C\,x$,а в координатной форме:

$$y = \begin{pmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ y_{3,0} \end{pmatrix},$$

Вектор $\widehat{F}y = \lambda\, y = \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \\ y_{3,1} \end{pmatrix}$, и при этом справедливы соотношения

$$\frac{y_{i,k}}{y_{j,k}} = \frac{y_{i,s}}{y_{j,s}} \quad (i,j=\overline{1,3}, k, s = \overline{1,2}) \qquad (5)$$

Воспользуемся тем, что каждое из $y_{l,m}$ ($l=\overline{1,3}, m = \overline{1,2}$) зависит как от коэффициентов полинома (1) (элементов матрицы F), так и элементов матрицы преобразования C и соответствующего собственного значения λ , и выберем так коэффициенты матрицы C (в силу того, что её можно выбирать), что (5) позволит выразить λ в виде полинома более низкой степени чем (1) или получить аналитическую формулу для нахождения корней полинома (1).

Так, полагая в (3) $c_1 = (a_1 - a_2)c_3 + 1; c_2 = 1; c_3 = \frac{a_2+a_3-2a_1\pm\sqrt{(a_2+a_3)^2-4a_1a_3}}{2a_1(a_1-a_2)}$
при $a_1 \neq a_2, a_1 \neq 0$,получаем корни полинома (1) по формулам:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2c_3}\left(\sqrt{4(a_1-a_2)c_3{}^2+4c_3}-1\right);$$
$$\lambda_2 = \frac{(-1)}{2c_3}\left(\sqrt{4(a_1-a_2)c_3{}^2+4c_3}+1\right);$$
$$\lambda_3 = \frac{a_3c_3}{c_1};$$

В том случае, когда $a_1 = 0$ или $a_1 = a_2$, следует выбрать другую матрицу преобразования С, и при этом формулы для полинома (1) будут иные. Следовательно, приведенный здесь метод даёт не единственно возможный вариант выражения корней полинома и не претендует на лучший из всех возможных вариантов.

Список литературы:

1 Roger A. Horn, Charles C. Johnson. Matrix Analysis, 2nd Edition, 2014. - P. 655.
2 Ivanov A., Aliev G., Bakiyev B. Analytical method of finding polynomial roots by using the eigenvectors, eigenvalues apparatus,p.94, Proceedings of the 2015 Twelve International Conference on Electronics Computer and Computation (ICECCO).

ӘӘЖ 53.0
Қ26

Калиева А.А.
аға оқытушы, Сулейман Демирель университеті
Ғылыми жетекші: Әлімбекова Г. Б., п.ғ.д профессор

ФИЗИКА ПӘНІН КӘСІБИ БАҒЫТТА ОҚЫТУДА ИННОВАЦИЯЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАРДЫ ТИІМДІ ҚОЛДАНУ ӘДІСТЕМЕСІ

Abstract. In order to adapt to the new time, school and academy's teaching methods and skills need to get improved. Teachers' professional knowledge level is supposed to get improved. We should know the reason that the less of academy's students' professional ability and how to make the teaching methods and education process get to a standard level.

Key words: methods, education, improved.

Физика пәнін оқытуда интерактивті әдістерді пайдаланудың тиімділігі

Жаратылыстану пәндеріне оның ішінде физика пәнінің мектепте оқытылу жайына көңіл аудару – тәуелсіз еліміздің болашақ мамандары үшін аса маңызды. Елімізде 300-дей мамандық түрлері бар десек, соның 80 пайызынан астамы түрлі сала инженерлері, ауылшаруашылық мамандары. Ендеше мектеп қабырғасынан бұл пәндерді терең меңгермеген адамнан келешекте нашар маман шығатыны еш күман туғызбайды. Кеңес заманынан бері бұл пәнге берілген сағат қысқартыла берді. Осының салдарынан физика пәнін оқытуда есептер шығаруға, лабораториялық жұмыстар жасауға аз уақыт бөлінеді. Осыдан оқушылардың физика пәніне деген қызығушылығын және оны оқыту сапасын қалай арттыруға болады деген сұрақ туындайды.

Мұғалім басты тұлға, шәкіртке бағыт – бағдар беруші бағдаршам десек, оқушы өздігінен еңбек етіп, талпынып, жеткен жетістігінің жемісін көруші, мұғалім мен оқушы үнемі бір – бірімен тығыз байланыста болуы қажет. Оқушыларды шығармашылықпен жұмыс істеуге баулығанда төмендегідей бағыттарға көңіл бөлу керек.

«Білім туралы» заңда білім беру жүйесінің басты міндеті «Ұлттық және жалпы азаматтық құндылықтар, ғылым мен тәжірибе жетістіктері негізінде жеке адамды қалыптастыруға, дамытуға және кәсіби шыңдауға бағытталған білім алу үшін жағдайлар