УДК 681.3

М.З. Арсланов,
доктор физико-математических наук, профессор,
Институт проблем информатики и управления МОН РК
Алматы/ Казахстан,

Об эквивалентности задач прямоугольного раскроя

Аннотация: Задачи раскроя являются сложными задачами дискретного программирования даже в простом случае раскроя прямоугольника на меньшие прямоугольники. Под раскроем будем понимать так называемый гильотинный раскрой, при котором резы проводятся через весь лист, остающийся после предыдущих резов.

Ключевые слова: прямоугольный раскрой, гильотинный раскрой, динамическое программирование, булева функция, вычислительный трудоемкость.

По методам раскроя, в том числе по методам прямоугольного раскроя опубликованы много работ, как зарубежных, так и отечественных. В существующей обширной литературе отметим работы [1-4], в которых предложены некоторые практические рекомендации, некоторые схемы динамического программирования для решения возникающих задач.

В [5] предложен алгоритм, основанный на схеме динамического программирования, воспроизведенный в [2], для решения задачи раскроя прямоугольника на равные прямоугольники меньшего размера. Этот алгоритм имеет практически приемлемую вычислительную трудоемкость. В настоящей работе проведено теоретическое исследование общей задачи раскроя прямоугольного листа на некоторое множество меньших прямоугольников. В первом разделе рассмотрена общая задача раскроя прямоугольника на меньшие прямоугольники и доказана теорема, в той или иной форме используемая в литературе, но явно не формулируемая.

Во втором разделе рассмотрена задача раскроя прямоугольника в ее взаимосвязи с монотонными функциями алгебры логики. На основе этой взаимосвязи предложена схема динамического программирования для решения основной задачи прямоугольного раскроя .

1. Общая задача прямоугольного раскроя

Рассмотрим задачу раскроя некоторого прямоугольника (A,B) на некоторое множество $\{(a_i,b_i),\ i \in I=\{1,2,...,n\}\}$меньших прямоугольников. Ясно, что по смыслу $A,\ B,\ a_i,\ b_i >0,\ i \in I$. Спрашивается, существует ли такой раскрой прямоугольника (A,B), при котором получается весь набор меньших прямоугольников $\{(a_i\ ,b_i\ ),\ i\ \in\ I\ =\{1,2,...,n\}\}$. Обозначим эту задачу в виде: $((A,B);(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n))$. С этой задачей связаны следующие две оптимизационные задачи с булевыми переменными x_i, y_i:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i x_i + b_i y_i) \to \max, \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i x_i + b_i y_i) \le A, \qquad (2)$$

$$x_i + y_i \le 1, \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i x_i + b_i y_i) \to \max, \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i x_i + b_i y_i) \le B, \qquad (5)$$

$$x_i + y_i \le 1, \qquad (6)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Раскрой* $((A,B);(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n))$, *существует тогда и только тогда, когда существует раскрой* $((A',B');(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n))$,
где A',B' – *решения оптимизационных задач* (1)-(3) и (4)-(6) *соответственно.*

Доказательство. Достаточно доказать необходимую часть теоремы. Воспользуемся методом математической индукции по числу *n*. Пусть существует раскрой $((A,B);(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n))$. Пусть для определенности первый рез этого раскроя параллелен стороне *B*. Перенумеровав маленькие прямоугольники, если надо, можно считать, что раскрой $((A,B);(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n))$ есть последовательное выполнение двух раскроев $((A_1,B);(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_l,b_l))$, $((A_2,B);(a_{l+1},b_{l+1}),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n))$, где $A_1 + A_2 = A$. Для них, согласно предположению, существуют раскрои $((A'_1,B'_1);(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_l,b_l))$, $((A'_2,B_2');(a_{l+1},b_{l+1}),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n))$, где A'_1, A'_2 – решения задач булевого программирования:

$$\sum_{i=1}^{l}(a_i x_i + b_i y_i) \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{l}(a_i x_i + b_i y_i) \le A_1,$$

$$x_i + y_i \le 1,$$

и

$$\sum_{i=l+1}^{n}(a_i x_i + b_i y_i) \to \max,$$

$$\sum_{i=l+1}^{n}(a_i x_i + b_i y_i) \le A_2,$$

$$x_i + y_i \le 1,$$

а B'_1, B'_2 – решения задач

$$\sum_{i=1}^{l}(a_i x_i + b_i y_i) \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{l}(a_i x_i + b_i y_i) \le B,$$

$$x_i + y_i \le 1,$$

и

$$\sum_{i=l+1}^{n}(a_i x_i + b_i y_i) \to \max,$$

$$\sum_{i=l+1}^{n}(a_i x_i + b_i y_i) \le B,$$

$$x_i + y_i \le 1.$$

Так как $A'_1 + A'_2 \le A'$ и $B' \ge B'_1, B'_2$, то существует раскрой $((A',B');(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n))$, с первым резом, параллельным стороне B' и разделяющим сторону A' на A'_1 и $A' - A'_1 \ge A'_2$. Если $a_i, b_i, i \in I$ – целые числа, то решения задач (1)-(3), (4)-(6) удовлетворяют неравенствам $A' \le [A]$, $B' \le [B]$, где $[\cdot]$ – целая часть аргумента. Поэтому справедливо применяемое в [1]

Следствие. *Пусть* $a_i, b_i, i \in I$ – *целые числа. Тогда раскрой* $((A,B);(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n))$ *существует тогда и только тогда, когда существует раскрой* $(([A],[B]);(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n))$.

2 Монотонные булевы функции, порождаемые задачей раскроя

С каждой задачей раскроя $((A,B);(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n))$ можно связать булеву функцию $f^{A,B}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ от булевых аргументов по правилу:

$$f^{A,B}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \begin{cases} 1, & \textit{если } \exists \textit{ раскрой } \big((A,B);(a_1x_1,b_1x_1),\dots,(a_nx_n,b_nx_n)\big) \\ 0, & \textit{если такого раскроя не существует.} \end{cases} \qquad (7)$$

Заметим, что эта функция является монотонно возрастающей булевой функцией. Ясно, что вычисление этой функции является более сложной задачей, чем просто задача раскроя $((A,B);(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n))$. Тем не менее, введение этой функции соответствует общим принципам динамического программирования и позволяет для решения задачи раскроя применять следующую схему динамического программирования, сформулированную в виде утверждения.

Утверждение 1. *Выполняется следующее функциональное равенство*

$$f^{A,B}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \max_{u\ge 0, z\le x} \max\,\{\min\{f^{A-u,B}(z_1,z_2,\dots,z_n), f^{u,B}(x_1-z_1,x_2-z_2,\dots,x_n-z_n)\},$$
$$\min\{f^{A,B-u}(z_1,z_2,\dots,z_n), f^{A,u}(x_1-z_1,x_2-z_2,\dots,x_n-z_n)\}\}.$$

При этом выполняется начальное условие

$f^{A,B}(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0$, если $\min(A,B)<0$.

Доказательство. Пусть $f^{A,B}(x_1,x_2,\dots,x_n) = 1$ для некоторых значений переменных x_i. Тогда существует раскрой $((A,B);(a_1x_1,b_1x_1),\dots,(a_nx_n,b_nx_n))$. Пусть первый рез этого раскроя параллелен стороне B и при этом левый прямоугольник $(A-u,B)$ раскраивается на некоторое подмножество прямоугольников, описываемое вектором $z \le x$. Соответственно правый прямоугольник (u,B) раскраивается на дополняющее подмножество прямоугольников, описываемое вектором $x - z$. Таким образом, справедливы равенства:

$$f^{A-u,B}(z_1,z_2,\dots,z_n) = 1; \quad f^{u,B}(x_1-z_1,x_2-z_2,\dots,x_n-z_n) = 1.$$

То есть $\min\{f^{A-u,B}(z_1,z_2,\dots,z_n), f^{u,B}(x_1-z_1,x_2-z_2,\dots,x_n-z_n)\} = 1$. Отсюда следует, что правая часть формулы в утверждении равна 1. Пусть с другой стороны, $f^{A,B}(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0$. Тогда, если предположить, что правая часть функционального равенства равна 1, то отсюда будет следовать, что для некоторых $u, z \le x$ выполняется

$$\max\{\min\{f^{A-u,B}(z_1,z_2,...,z_n), f^{u,B}(x_1-z_1,x_2-z_2,...,x_n-z_n)\},$$
$$\min\{f^{A,B-u}(z_1,z_2,...,z_n), f^{A,u}(x_1-z_1,x_2-z_2,...,x_n-z_n)\}\}=1.$$

То есть какое-то из двух выражений под знаком max равно 1. Скажем, $\min\{f^{A-u,B}(z_1,z_2,...,z_n), f^{u,B}(x_1-z_1,x_2-z_2,...,x_n-z_n)\}=1$.

Тогда из определения булевой функции (7) будет следовать, что существуют раскрои $((A-u,B);(a_1z_1,b_1z_1),...,(a_nz_n,b_nz_n))$, $((u,B);(a_1(x_1-z_1),b_1(x_1-z_1)),...,(a_n(x_n-z_n),b_n(x_n-z_n)))$.

Но отсюда следует, что если объединить оба этих раскроя, то можно получить раскрой $((A,B);(a_1x_1,b_1x_1),...,(a_nx_n,b_nx_n))$. То есть $f^{A,B}(x_1,x_2,...,x_n)=1$. Полученное противоречие окончательно доказывает утверждение.

Легко понять, что предложенная схема динамического программирования носит слишком трудоемкий характер и носит скорее теоретический, чем практический характер.

Предложенные понятия проиллюстрируем следующим простым примером задачи раскроя: $((5,5);(3,2),(2,3),(3,2),(2,3))$.

Тогда монотонная булева функция, соответствующая этой задаче раскроя равна 1 на всех наборах булевых переменных x_1,x_2,x_3,x_4 за исключением набора, в котором все переменные равны 1.

Наконец отметим, что существует следующее обобщение теоремы 1

Теорема 2. *Справедливо функциональное равенство*

$$f^{A,B}(x_1,x_2,...,x_n)=f^{A',B'}(x_1,x_2,...,x_n),$$

где A', B' *– решения оптимизационных задач* (1)-(6).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1, поэтому мы его опускаем.

Заключение

В настоящей работе для решения практической задачи оптимального раскроя прямоугольника на меньшие прямоугольники используются такие классические результаты как метод динамического программирования, монотонные функции алгебры логики. Полученные результаты носят теоретический характер и связаны с тем обстоятельством, что полученная схема динамического программирования для решения задачи имеет очень большую трудоемкость. Тем не менее они указывают направления дальнейшего поиска эффективных алгоритмов решения задач раскроя.

Литература

1 Канторович Л.В., Залгаллер В.А. Рациональный раскрой промышленных материалов. - Новосибирск, Наука: 1971.

2 Мухачева Э.А. Рациональный раскрой промышленных материалов. Применение АСУ, Машиностроение, - М., 1984.

3 Arslanov M.Z. A polynomial algorithm for one problem of guillotine cutting. Operations Research Letters. 35(2007) 636-644p.

4 Дремин С.Ю., Залгаллер В.А. О раскрое листа на равные прямоугольные заготовки. Оптимизация. – М., 27(44), 1981, 136-142с.

5 Lindecrantz N. Method for optimum cutting of rectangular sheets. Nord.tidsck informationsbegand, - M., 4, 1964, N 1, 30-35p.

6 Саати Т. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. – М., Мир: 1973.

Түйін

Мақалада дискретті бағдарламалаудың күрделі есебі ретінде тікбұрышты пішіндеу есебі қарастырылған. Осы мақсатта буль айнымаларына тәуелді тиімділеу есебі қойылып, тік бұрышты пішіндеудің бар болу теоремасы дәлелденген.

Özet

Makelede karmaşık bir ayrık programlama olarak kabul edilen, dikdörtgen bir iç içe geçme yöntemi etkinliğini göstermektedir. Bu amaçla, Boole fonksiyonları ile optimmizatsionnaya sorunu ayarlamak ve dikdörtgen kesim varlığını kanıtlamaktadır.

Resume

In work efficiency of a method of rectangular cutting which is considered as difficult discrete programming is shown. The optimizing task with Boolean functions is for this purpose set and the theorem of existence of rectangular cutting is proved.

УДК: 378.016.02:51-8:164.2(574)

С. А. Джанабердиева,
к.п.н., доцент,
КазНПУ имени Абая
Алматы/Казахстан
Жуо Джиндон,
PhD доктор, профессор,
Илийского государственного университета
Кульджа/КНР
М. Усипбекова,
магистрант,
Университет имени С.Демиреля

Применения «занимательной математики» для развития логического мышления учащихся

Аннотация: В работе рассматриваются актуальные проблемы развития профессионального мастерства будущих учителей по занимательному преподаванию современной школьной математики.

Ключевые слова: логического мышления, занимательная математика, логика, разум.

По признанию многих известных математиков и физиков, чтение «Занимательной математики» и «Занимательной физики» известного российского популяризатора науки Якова