МРНТИ 27.01

В.В. Вербовский[1]

[1]Университет имени Сулеймана Демиреля, г. Алматы, Казахстан

О МИНИМАЛЬНЫХ С ТОЧНОСТЬЮ ДО Δ СТРУКТУРАХ

Аннотация. Известно, что о-минимальность эквивалентна тому, что каждое сечение имеет единственное расширение до полного типа над рассматриваемой структурой. То есть то, что любая формула от одной свободной переменной эквивалентна булевой комбинации равенств и неравенств, эквивалентно тому, что каждое сечение, которое так же является и полным Δ-типом, где $\Delta = \{x = y, x < y, x > y\}$, имеет единственное расширение до полного типа.

Как было доказано Б. Кулпешовым, любое сечение в слабо о-минимальной структуре может иметь максимум два расширения до полных типов, причем множества всех реализаций этих типов являются выпуклыми в любых элементарных расширениях. В статье дается обобщение этого факта — модель M минимальна с точностью до Δ тогда и только тогда, когда любое формульное подмножество декартовой степени $M^{len(\bar{x})}$ является булевой комбинацией формул вида $\bar{x} = \bar{a}$ и $\varphi(\bar{x}; \bar{b})$.

Ключевые слова: Математическая логика, теория моделей, о-минимальность, частичный тип.

***

Аңдатпа. Σ-минималдылығы әр бөлімнің қарастырылып жатқан құрылым бойынша толық түрге дейін бірегей кеңейтілу бар екендігіне белгілі. Яғни, бір бос айнымалының кез-келген формуласы теңдік пен теңсіздіктердің логикалық комбинациясымен балама болып табылады, сонымен қатар, толық типке ие әрбір бөлім толық түрге дейін бірегей кеңейтімге ие болғандығына тең. Б.Кулешов дәлелдегендей, әлсіз омби-математикалық құрылымдағы кез-келген секция түрлерін аяқтау үшін максимум екі кеңейтілімге ие болуы мүмкін, және бұл түрлердің барлық іске асуы кез-келген қарапайым кеңейтулерде дөңес болады. Мақалада осы фактіні қорыту қарастырылған - бұл модель ең аз және тек Cartesian дәрежесінің кез-келген формуласы - формула формулаларының логикалық тіркесімі болған жағдайда ғана.

Кілт сөздер: математикалық логика, модельдік теория, о-минималитет, жартылай түрі.

***

Abstract. It is known that o-minimality is equivalent that each cut has a unique extension up to a complete type over the structure. That is, the fact that any formula in one free variable is equivalent to a Boolean combination of equalities and inequalities is equivalent to the fact, that each cut, which is a

complete Δ-type, where $\Delta = \{x = y, x < y, x > y\}$, has a unique extension up to a complete type. As it was shown by B. Kulpeshov, any cut in a weakly o-minimal structure has at most two extensions up to complete types over the model, ant the sets of realizations of these complete types are convex in any elementary extension of the model. In the paper we give a generalization of this fact—a model M is minimal up to Δ if and only if any its definable subset of $M^{len(\bar{x})}$ is a Boolean combination of formulae of the forms $\bar{x} = \bar{a}$ and $\varphi(\bar{x}; \bar{b})$.

Key words: mathematical logic, model theory, o-minimality, a partial type.

Сперва мы дадим определение, которое базируется на определение стабильности с точностью до Δ из [1].

Определение Пусть дано семейство Δ формул вида $\varphi(\bar{x}; \bar{y})$. Алгебраическая структура M называется минимальной с точностью до Δ, если любой Δ-тип s над M имеет единственное расширение до полного типа над M.

Теория T называется сильно минимальной с точностью до Δ, если все ее модели минимальны с точностью до Δ.

Пусть $\Delta = \{\bar{x} = \bar{y},\ \varphi(\bar{x}; \bar{z})\}$. Очевидно, что если некоторый Δ-тип s содержит положительное вхождение формулы $\bar{x} = \bar{a}$, для некоторого $\bar{a} \in M$, тогда этот тип алгебраичен и имеет единственное расширение до полного типа. Вот почему имеет смысл рассматривать только неглавные типа Δ-типы над M.

Теорема Пусть $\Delta = \{\bar{x} = \bar{y},\ \varphi(\bar{x}; \bar{z})\}$. Модель M минимальна с точностью до Δ тогда и только тогда, когда любое формульное подмножество декартовой степени $M^{len(\bar{x})}$ является булевой комбинацией формул вида $\bar{x} = \bar{a}$ и $\varphi(\bar{x}; \bar{b})$.

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что x — это элемент, то есть что $len(\bar{x}) = 1$. Сначала докажем достаточность. Пусть любое формульное подмножество декартовой степени $M^{len(\bar{x})}$ является булевой комбинацией формул вида $\bar{x} = \bar{a}$ и $\varphi(\bar{x}; \bar{b})$. Пусть $\Theta(x)$ — произвольная совместная формула. В силу того, что она эквивалентна булевой комбинации формул вида $\bar{x} = \bar{a}$ и $\varphi(\bar{x}; \bar{b})$, можно считать, что она записана в виде дизъюнктивной нормальной формы от атомарных формул $x = a$ и $\varphi(x; \bar{b})$, причем все ее элементарные конъюнкции совместны.

Случай 1.

Предположим, что некоторая элементарная конъюнкция содержит формулу вида $x = a$. Очевидно, что тогда эта элементарная конъюнкция, в силу своей совместности, логически эквивалентна формуле $x = a$.

Пусть s — некоторый Δ-тип.

Случай 1.1 Если формула $x = a$ лежит в типе s, то, очевидно, что формула $\Theta(x)$ совместна с типом s, а формула $\neg\Theta$ несовместна с этим типом.

Случай 1.2 Пусть формула $x = a$ не лежит в типе s. Тогда формула $\Theta(x)$ совместна с типом s тогда и только тогда, когда с ней совместна формула $\Theta_1(x)$, полученная из формулы $\Theta(x)$ удалением дизъюнкта $x = a$.

Таким образом, можно считать, что формула $\Theta_1(x)$ не содержит подформулу вида $x = a$.

И мы переходим ко второму случаю.

Случай 2.

Ни одна из элементарных конъюнкций не содержит формула вида $x = a$.

Случай 2.1 Если формула $x = a$ лежит в типе s, то, очевидно, что этот тип имеет единственное расширение до полного типа над рассматриваемой моделью.

Случай 2.2 Пусть формула $x = a$ не лежит в типе s. Поскольку ни в формуле, ни в типе нет вхождения формула $x = a$, можно считать, что и формула $x \neq a$ не входит в формулу $\Theta(x)$.Стало быть, наша формула эквивалентна следующей формуле:

$$\Theta(x) \Leftrightarrow \bigvee_{i<k} \bigwedge_{j<n} \varphi^{\tau(i,j)}(x;\bar{b}_{i,j})$$

Очевидно, что формула $\Theta(x)$ совместна с типом s, если и только если при некотором i формулы $\varphi^{\tau(i,0)}(x;\, \bar{b}_{i,0})$, ..., $\varphi^{\tau(i,n-1)}(x;\, \bar{b}_{i,n-1})$ лежат в типе s. Следовательно, тип s имеет единственное расширение до полного типа над моделью.

Теперь мы докажем необходимость.

Пусть s будем произвольным Δ-типом над моделью M. Поскольку этот тип имеет единственное расширение до полного типа, имеем, что либо $s(x) \cup \{\Psi(x)\}$ несовместно, либо $s(x) \cup \{\neg\Psi(x)\}$ несовместно.

В первом случае существует такое конечное минимальное подмножество $s_0(x)$ типа $s(x)$, что имеет место $s_0(x) \vdash \neg\Psi(x)$, а во втором существует такое конечное подмножество $s_1(x)$ типа $s(x)$, что имеет место $s_1(x) \vdash \Psi(x)$.

Обозначим через $S_i(x)$ конъюнкцию всех элементов множества $s_i(x)$, где $i = 1, 2$. Тогда формула $S_0(x)$ выделяет подмножество множества всех реализаций формулы $\neg\Psi(x)$, а формула $S_1(x)$ выделяет подмножество множества всех реализаций формулы $\Psi(x)$.

Пусть $q_i(x)$ состоит из всех $\neg S_i(x)$, таких что, когда $i = 0$, то $s(x) \cup \{\Psi(x)\}$ несовместно, а когда $i = 1$, то $s(x) \cup \{\neg\Psi(x)\}$ несовместно, иначе говоря, пусть $q_i(x)$ состоит из всех $\neg S_i(x)$, таких что $s(x) \cup \{\Psi^{1-i}(x)\}$ несовместно, здесь s пробегает множество всех Δ-типов над моделью M. Если множество формул $q_i(x) \cup \{\Psi^i(x)\}$ несовместно, то существует конечная подчасть $r_i(x)$ типа $q_i(x)$, такая что $r_i(x) \vdash \Psi^{1-i}(x)$.

Пусть $r_i(x) = \{\neg S_{i,1}(x), \dots, \neg S_{i,m}(x)\}$. Тогда $S_{i,j}(x) \vdash \Psi^i(x)$ при каждом j, следовательно,

$$\bigvee_{j=1}^{m} S_{i,j}(x) \vdash \Psi^{i}(x)$$

Кроме того, $\neg S_{i,1}(x), \dots, \neg S_{i,m}(x) \vdash \Psi^{1-i}(x)$. То есть,

$$\bigwedge_{j=1}^{m} \neg S_{i,j}(x) \vdash \Psi^{1-i}(x)$$

Следовательно, $\Psi^{i}(x)$ эквивалентна $\bigvee_{j=1}^{m} S_{i,j}(x)$.

Осталось рассмотреть случай, когда множество формул $q_i(x) \cup \{\Psi^i(x)\}$ совместно.

Пусть $\neg S_i(x)$ лежит в $q_i(x)$. Поскольку $S_i(x)$ — это конъюнкция, ее отрицание по закону де Моргана эквивалентно дизъюнкции отрицаний. Раз эта дизъюнкция совместна с формулой $\Psi^i(x)$, то хотя бы один дизъюнкт совместен с формулой $\Psi^i(x)$.

Следовательно, для любого конечного числа типов $s(x)$ из построенным по ним конъюнкциям $S_i(x)$ можно выбрать по одному дизъюнкту из $\neg S_i(x)$, так что полученное множество формул будет совместно с формулой $\Psi^i(x)$. Пусть множество формул $t_1(x)$ построено следующим образом: для каждого типа $s(x)$, из которого мы строили конъюнкцию $S_i(x)$, выбрали по одному дизъюнкту из $\neg S_i(x)$. Мы знаем, что существует как минимум одна функция выбора, такая что построенное таким образом множество формул $t(x)$ совместно, более того, оно совместно с формулой $\Psi^i(x)$.

Значит, данное множество формул можно расширить до полного φ-типа $t(x)$ над моделью M, который будет совместен с формулой $\Psi^i(x)$. Но тогда $t(x)$ несовместен с формулой $\Psi^{1-i}(x)$. Значит, тип $t(?)$ — это один из тех типов $s(x)$, которые несовместны с формулой $\Psi^{1-i}(x)$. Но если формула $\varphi^j(x;\bar{b}) \in s_i$, такая что в $t_1(x)$ мы выбрали ее отрицание, вспомним, что мы выбрали по одному дизъюнкту из $\neg S_i(x)$, то тип $s(x)$ никак не может равняться типу $s(x)$.

Получили противоречие, следовательно формул $q_i(x) \cup \{\Psi^i(x)\}$ не может быть совместно

Теорема доказана.

Список литературы:

1 Verbovskiy V.V. On a classification of theories without the independence property // Mathematical Logic Quarterly. – 2013. – V. 59. – P. 119-124.

2 Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic. – 1998. –Vol. 63. – P. 1511-1528.

IRSTI 30.19

S.A. Kassabek [1], A.M. Orynbassar[2]

[1]Suleyman Demirel University, Almaty, Kazakhstan

[2]Bilim Innovation Lyceum, Taldykorgan, Kazakhstan

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE GENERALIZED HEAT EQUATION IN THE DOMAIN WITH MOVING BOUNDARY

Abstract. Method to solve the problem for heat equation for solid with variable cross-section with moving boundary is based on use degenerate hypergeometric function. Solution of problem is a linear combination degenerate hypergeometric function. The main idea of this method is to find coefficients and prove the convergence of series.Consider the surface generated by revolution of a curve $r = y(z,t)$ about z - axes. Let us assume that the radial component of the temperature gradient in the solid bounded by above surface is negligible in comparison with the axial component, i.e. the solid can be considered as a bar with a variable cross – section that has only axial component of heat flux.