Исключительные 0-Alia алгебры.

А.С. Джумадильдаев, К.М. Туленбаев

Аннотация

Алгебра (A, *) с тождеством $[a,b]*c+[b,c]*a+[c,a]*b=0$, где $[a,b]=a*b-b*a$ называется

0-Alia. В данной статье приводится доказательство того, что алгебра (C[x],*) относительно умножения $a*b=d^2(2ad(b)+d(a)b)$ является простой исключительной 0-Alia алгеброй, где d –обычный оператор дифференцирования.

Пусть C[x] алгебра многочленов относительно обычного умножения. Введем на C[x] новое умножение $a*b=d^2(2ad(b)+d(a)b)$. Как показано в работе А. С. Джумадильдаева C[x] является простой и 0-Alia.

Пусть U является ассоциативной коммутативной алгеброй относительно

умножения $\circ$ и f,g: U ->U являются линейными отображениями. Алгебра (U, $\circ$,f, g) определена как векторное пространство U с умножением $a*b= a\circ f(b)+g(a\circ b)$.

В доказано, что любая алгебра формы (U, $\circ$,f, g) есть 0-Alia. 0-Alia алгебра A

называется специальной, если она может быть получена как подалгебра

0-Alia алгебры формы (U, $\circ$,f, g) для некоторой ассоциативной коммутативной алгебры

(U, $\circ$) и ее эндоморфизмов f,g. Иначе говорим, что 0-Alia алгебра A является исключительной.

Цель нашей статьи доказать следующий результат.

Основная теорема. 0-Alia алгебра (C [x],*) является исключительной.

Необходимо показать, что алгебра (C [x],*) не изоморфна подалгебре алгебры формы

(U, $\circ$,f, g). Предположим, что теорема неверна и такая алгебра U существует . Тогда,

$d^2(2ad(b)+d(a)b)=a \circ f(b)+g(a \circ b)$ для любых a,b из U. Мы можем предположить, что U содержит C[x] как подпространство, и в частности содержит элементы 1, x, x^2, x^3, ...

Лемма1. Для любых a из C[x] подмножества U выполнены следующие тождества:

1) $2d^3(a)=1 \circ f(a)+g(1 \circ a)$.

2) $d^3(a)=a \circ f(1)+g(a \circ 1)$.

Лемма 2. Для любых a,b из C[x] подмножества U выполнены следующие соотношения:

1) $d^2(ad(b)-d(a)b)\, c=d^2(2(a \circ c)d(b)+d(a \circ c)b-2(b \circ c)d(a)-d(b \circ c)a)$.

2) $1 \circ 1=0$.

3) $1 \circ f(1)=0$.

4) $d^3(1 \circ a)=0$.

5) $1 \circ a=0$.

Мы видим, что в лемме 2 уравнения не зависит от f и g.

Доказательство теоремы:

Заметим, что каждый элемент u из C[x] может быть представлен

в виде $u= d^3(a)$ для некоторого a из C[x].

Для всех a из C [x] подмножества U справедливо $2d^3(a)=1\circ f(a)$.$$

Следует из Лемм 1 и 2. Для любых a,b из C[x] подмножества U верно $a\circ b=0$.

Обозначим через x^k степень x^k.

Для любых неотрицательных целых k, l не равных 0 заметим, что x^k=2d ^{3}(b_1), x=2d ^{3}(b_2), где b_1=x^{k+3}/(2(k+3)(k+2)(k+1) и b_2=(x^{l+3}/(2(l+3)(l+2)(l+1). Следовательно, по Лемме 2 x^k $\circ$ x=(1 $\circ$ b_1) $\circ$ (1 $\circ$ f(b_2)).

Из-за ассоциативности и коммутатиивности умножения $\circ$ и по Лемме 1 мы имеем:

x^k ° x=0. Положим e_k=f(x^k) . По Лемме 2 a* b=a ° f(b) и d ^{2}(2ad(b)+d(a)b)=a ° f(b)

Мы имеем x^k ° e_l=(k+2l)d ^{2}(x^{k+l-1}). Следовательно, (x^k ° e_s) ° e_l=

=(k+2s)d ^{2}(x^{k+s-1}) ° e_l=

=(k+2s)(k+s-1)(k+s-2) x^{k+s-3}° e_l=(k+2s)(k+s-1)(k+s-2)(k+s+2l-3)d ^{2}(x^{k+s+l-4}).

С другой стороны, по тем же соображениям,

(x^k ° e_l) ° e_s=(k+2l)(k+l-1)(k+l-2)(k+l+2s-3)d ^{2}(x^{k+s+l-4}).

Из-за ассоциативности и коммутатиивности умножения °,

(x^k ° e_l) ° e_s=(x^k ° e_s) ° e_l для любых неотрицательных целых чисел k, l, s. Следовательно, имеет место тождество (k+2s)(k+s-1)(k+s-2)(k+s+2l-3)=

=(k+2l)(k+l-1)(k+l-2)(k+l+2s-3) для достаточно больших неотрицательных

целых чисел k, l, s (например, k+l+s>6). Очевидно, что оно не верно.

Например, для k=2, l=3,s=4, мы имеем противоречие: 1800=960.

Доказательство нашей теоремы закончено полностью.

Утверждение теоремы показывает, что структура простых 0-Alia алгебр более сложна и не получается из ассоциативных алгебр, например, как алгебры Ли.

Список использованной литературы

1. A.S. Dzhumadil'daev. Algebras with skew-symmetric identity of degree 3. Submitted to Proc. Vinberg congerence.