ҒТАХР 27.01.45

Ж Т. Қайыңбай[1]
[1]С. Демирел атындағы университеті, Қаскелең қ., Қазақстан

КЕЙБІР ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ МӘСЕЛЕЛЕРДІ ЖАЛПЫ ЖАҒДАЙДАН ЖЕКЕ ЖАҒДАЙҒА КӨШІРІУ НЕГІЗІНДЕ ҚАРАСТЫРУ

Аңдатпа. Қазіргі кездегі қолданыстағы бағдарлама бойынша, геометриядағы көпбұрыш, дұрыс көпбұрыш, көпбұрыштың ішкі бұрыштары, көпбұрыштың диогоналдары, көпбұрышқа іштей сызылған шеңбер, көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбер, дұрыс көпбұрыштың ауданы … деген сияқты мәселелер қазіргі кезде алдымен үшбұрыш және олардың әр түрі(дұрыс үшбұрыш, тікбұрышты үшбұрыш, тең бүйірлі үшбұрыш) үшін, одан соң төртбұрыштар, нақты айтқанда олардың әр түрлері(шаршы, тіктөртбұрыш, трапеция, паралеллограм, ромб) үшін жеке жеке қарастырылады. Мақалада, осы мәселелердің қарастырылу реті бойынша атап айтқанда, геометриядағы жалпы жағдайлар мен олардан туындайтын жеке жағдайлар жайлы мәселе қозғалған.

Түйін сөздер: математикадағы жалпы жағдайлар, математикадағы жеке жағдайлар, көпбұрыш, дұрыс көпбұрыш, көпбұрыштың ішкі бұрыштары, көпбұрыштың диогоналдары, көпбұрышқа іштей сызылған шеңбер, көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбер, дұрыс көпбұрыштың ауданы.

***

Аннотация. Текущая программа по геометрии, многоугольник, правильный многоугольник, внутренние углы многоугольников, диагоналы многоугольников, вписанная окружность многоугольника, описанная окружность многоугольника, область правильного многоугольника ... такие вопросы, как треугольник и для каждого из них (правильный треугольник, прямоугольный треугольник, равнобедренный треугольник) затем прямоугольники рассматриваются отдельно для конкретных типов (квадрат, прямоугольник, трапеция, паралелограмма, ромб). В статье рассматривается общая ситуация в геометрии и конкретные обстоятельства, возникающие из них в том порядке, в котором эти вопросы рассматриваются.

Ключевые слова: общие случай по математике, отдельные случаи по математике, многоугольник, правильный многоугольник, внутренние углы многоугольников, диагоналы многоугольников, вписанная окружность многоугольника, описанная окружность многоугольника, область правильного многоугольника.

***

Abstract. Current geometry program, polygon, regular polygon, internal angles of polygons, diagonals of polygons, inscribed circle of a polygon, circumscribed circle of a polygon, region of a regular polygon ... such questions as a triangle and for each of them (regular triangle, right triangle, isosceles triangle) then the rectangles are considered separately for specific types (square, rectangle, trapezoid, parallelogram, rhombus). The article considers the general situation in geometry and the specific circumstances arising from them in the order in which these issues are considered.

Keywords: general case in mathematics, individual cases in mathematics, polygon, regular polygon, internal angles of polygons, diagonals of polygons, inscribed circle of a polygon, described circle of a polygon, region of a regular polygon.

Қазақ Еліндегі жалпы білім беретін орта мектептерде математиканы оқыту барысындағы басшылықа алынатын негізгі қағидалардың бірі «жекеден жалпыға» қағидасы. Ол дегеніміз қандай да математикалық мәселенің алдымен жеке жағдайы қарастырылады да одан соң біраз уақыт өткен соң ғана оның жалпы жағдайы қарастырылуы мүмкін немесе жалпы білім беретін орта мектепте осы жеке жағдайды қарастырумен мәселе шектелуі мүмкін. Бұрыннан, мен өзім мектеп есігін 1966 жылы ашқалы бергі жағдай осылай. Бұл жағдай бір кездері дұрыс та болды. Ал, қатып қалған бұл қағида менің ойымша бүгінгі жағдайға жауап бере алмайды. Сондықтан да, математиканы оқыту барысында қазіргі кезде ескеруге тиісті бір мәселе бар деп ойлаймын. Ол, әрі уақыт үнемдеу үшін, әрі оқушылардың көбірек білім алулары үшін, әрі оқушылардың өзіндік жұмыс істеу дағдыларын қалыптастыру үшін *математика мұғалімдерінің математикадағы жалпы жағдайлар бойынша оқушылармен жұмыс істеп, одан туындайтын жеке жағдайларды оқушылардың өздерінің қорытып шығаруларына мүмкіндік беруі, жағдай жасауы* деп ойлаймын. Мәселенің бұлай болуы, қазіргі кездегі еліміздің білім беру саясатындағы әр білім алушының өзінің *«өзіндік білім алу траекториясын өзі қалыптастыруы керек»* деген қағидасымен ұштасып жатыр десек қателеспейміз.

Бұл жағдайларға математиканың бір бөлімі болып саналатын геометриядан төмендегідей мәселелер мысал бола алады деп пайымдаймын.

1.Көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы жайлы тұжырым және одан туындайтын үшбұрыштың, төртбұрыштың, бесбұрыштың, … ішкі бұрыштарының қосындысының мәні;

2. Көпбұрыштың диогоналдарының санына байланысты формула және одан туындайтын төртбұрыштың, бесбұрыштың, … диогоналдарының санын анықтау мәселесі;

3. Көпбұрыштың бір төбесінен шығатын диогоналдары негізінде құралатын үшбұрыштардың саны жайлы тұжырым.

4. Дұрыс көпбұрышқа іштей сызылған шеңбер радиусын көпбұрыштың қабырғасы арқылы табу формуласы мен одан туындайтын дұрыс үшбұрышқа, дұрыс төртбұрышқа, дұрыс бесбұрышқа, дұрыс алтыбұрышқа ... іштей сызылған шеңбер радиусын дұрыс үшбұрыштың, дұрыс төртбұрыштың, дұрыс бесбұрыштың, дұрыс алтыбұрыштың ... қабырғасы арқылы табу жағдайлары;

5. Дұрыс көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбер радиусын табу формуласы мен одан туындайтын дұрыс үшбұрышқа, дұрыс төртбұрышқа, дұрыс бесбұрышқа, дұрыс алтыбұрышқа ... сырттай сызылған шеңбер радиусын табу жағдайлары;

6. Дұрыс көпбұрыштың ауданын көпбұрыштың қабырғасы арқылы табу формуласы мен одан туындайтын дұрыс үшбұрыштың, дұрыс төртбұрыштың, дұрыс бесбұрыштағы, дұрыс алтыбұрыштың ... ауданын қабырғасы арқылы табу жағдайлары;

7. Дұрыс көпбұрыштың ауданын көпбұрышқа іштей сызылған шеңбер радиусы арқылы табу формуласы мен одан туындайтын дұрыс үшбұрыштың, дұрыс төртбұрыштың, дұрыс бесбұрыштағы, дұрыс алтыбұрыштың ... ауданын көпбұрышқа іштей сызылған шеңбер радиусы арқылы табу жағдайлары;

8. Дұрыс көпбұрыштың ауданын көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбер радиусы арқылы табу формуласы мен одан туындайтын дұрыс үшбұрыштың, дұрыс төртбұрыштың, дұрыс бесбұрыштағы, дұрыс алтыбұрыштың ... ауданын көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбер радиусы арқылы табу жағдайлары ....

Ендігі кезекте осы айтылғандарды ашып жазайық ...

1. *Кез келген n-бұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы*

180°*(n-2) өрнегінің мәніне тең болады.*

Осы тұжырымның жеке жағдайларын қарастырайық.

а) n=3 болғанда, 180°(n-2)= 180°(3-2) = 180°

ә) n=4 болғанда, 180°(n-2)= 180°(4-2) = 360°

б) n=5 болғанда, 180°(n-2)= 180°(5-2) = 540°

в) n=6 болғанда, 180°(n-2)= 180°(6-2) = 720°

....

n=10 болғанда, 180°(n-2)= 180°(10-2) = 1440°

……………………………………………………..

n=100 болғанда, 180°(n-2)= 180°(100-2) = 17640°

2. *n-бұрышты көпбұрыштың диогоналдарының саны* $N = \frac{n(n-3)}{2}$ *формуласымен есептеледі.* Осы тұжырымның жеке жағдайларын қарастырайық.

а) n=3 болғанда, $\mathrm{N} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{3(3-3)}{2} = 0$

ә) n=4 болғанда, $\mathrm{N} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{4(4-3)}{2} = 2$

б) n=5 болғанда, $\mathrm{N} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{5(5-3)}{2} = 5$

в) n=6 болғанда, $\mathrm{N} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{6(6-3)}{2} = 9$

....

n=10 болғанда, $\mathrm{N} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{10(10-3)}{2} = 35$

……………………………………………………..

n=100 болғанда, $\mathrm{N} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{100(100-3)}{2} = 4850$

3. *Көпбұрыштың бір төбесінен шығатын диогоналдары негізінде құралатын үшбұрыштардың саны К= n-2 формуласымен есептеледі.* Мұндағы, К -көпбұрыштың бір төбесінен шығатын диогоналдары

негізінде құралатын үшбұрыштардың саны, ал n- көпбұрыштың бұрыштарының саны. Осы тұжырымның жеке жағдайларын қарастырайық.

а) n=3 болғанда, $\mathrm{K} = \mathrm{n} - 2 = 3 - 2 = 1$

ә) n=4 болғанда, $\mathrm{K} = \mathrm{n} - 2 = 4 - 2 = 2$

б) n=5 болғанда, $\mathrm{K} = \mathrm{n} - 2 = 5 - 2 = 3$

в) n=6 болғанда, $\mathrm{K} = \mathrm{n} - 2 = 6 - 2 = 4$

....

n=10 болғанда, $\mathrm{K} = \mathrm{n} - 2 = 10 - 2 = 8$

…………………………………………………………..

n=100 болғанда, $\mathrm{K} = \mathrm{n} - 2 = 100 - 2 = 98$

4. $\mathbf{r} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{180}{n}}$ *формуласы дұрыс көпбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусын көпбұрыштың қабырғасы арқылы табуға арналған жалпы формула.*

а) n=3 болғанда, $\mathrm{r} = \frac{a}{2\,\mathrm{t}\,\frac{180}{n}} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{180}{3}} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,6} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

ә) n=4 болғанда, $\mathrm{r} = \frac{a}{2\,\mathrm{t}\,\frac{180}{n}} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{180}{4}} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,45} = \frac{a}{2}$

б) n=5 болғанда, $\mathrm{r} = \frac{a}{2\,\mathrm{t}\,\frac{180}{n}} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{180}{5}} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,36}$

в) n=6 болғанда, $\mathrm{r} = \frac{a}{2\,\mathrm{t}\,\frac{180}{n}} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{180}{6}} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,30} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

....

n=10 болғанда, $\mathrm{r} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{180}{n}} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,10} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,18}$

…………………………………………………………..

n=100 болғанда, $\mathrm{r} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{180}{n}} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{180}{100}} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,1{,}8}$

5. $\boldsymbol{R = \frac{a}{2sin\frac{180°}{n}}}$ *формуласы дұрыс көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын көпбұрыштың қабырғасы арқылы табуға арналған жалпы формула.*

а) n=3 болғанда, $R = \frac{a}{2sin\frac{180°}{n}} = \frac{a}{2sin\frac{180°}{3}} = \frac{a}{2sin} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

ә) n=4 болғанда, $R = \frac{a}{2si\ \frac{180°}{n}} = \frac{a}{2sin\frac{180°}{4}} = \frac{a}{2sin4} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

б) n=5 болғанда, $R = \frac{a}{2sin\frac{180°}{n}} = \frac{a}{2sin\frac{180°}{5}} = \frac{a}{2sin36}$

в) n=6 болғанда, $R = \frac{a}{2sin\frac{180°}{n}} = \frac{a}{2sin\frac{180°}{6}} = \frac{a}{2sin3} = a$

....

n=10 болғанда, $R = \frac{a}{2s\ \frac{180°}{n}} = \frac{a}{2sin\frac{180°}{10}} = \frac{a}{2sin18}$

……………………………………………………..

n=100 болғанда, $R = \frac{a}{2sin\frac{180°}{n}} = \frac{a}{2sin\frac{180°}{100}} = \frac{a}{2sin1,8}$

6. $\boldsymbol{S = \frac{a^2n}{4tg\frac{180°}{n}}}$ *формуласы дұрыс көпбұрыштың ауданын көпбұрыштың қабырғасы арқылы табу формуласы.*

а) n=3 болғанда, $S = \frac{a^2n}{4tg\frac{180°}{n}} = \frac{a^23}{4tg\frac{180°}{3}} = \frac{3a^2}{4tg60} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

ә) n=4 болғанда, $S = \frac{a^2n}{4tg\frac{180°}{n}} = \frac{a^24}{4tg\frac{180°}{4}} = \frac{4a^2}{4tg45} = a^2$

б) n=5 болғанда, $S = \frac{a^2n}{4tg\frac{180°}{n}} = \frac{a^25}{4tg\frac{180°}{5}} = \frac{5a^2}{4tg}$

в) n=6 болғанда, $S = \frac{a^2n}{4tg\frac{180°}{n}} = \frac{a^26}{4t\ \frac{180°}{6}} = \frac{6a^2}{4tg3} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$

....

n=10 болғанда, $S = \frac{a^2 n}{4tg\frac{180°}{n}} = \frac{a^2 10}{4tg\frac{180°}{10}} = \frac{10a^2}{4tg18}$

……………………………………………

n=100 болғанда, $S = \frac{a^2 n}{4tg\frac{180°}{n}} = \frac{a^2 100}{4tg\frac{180°}{100}} = \frac{100a^2}{4tg1{,}8}$

7. $\boldsymbol{S = \mathrm{r}^2\ \mathrm{n}\ \mathrm{tg}\frac{180°}{\mathrm{n}}}$ *формуласы дұрыс көпбұрыштың ауданын көпбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы арқылы табу формуласы.*

а) n=3 болғанда, $S = \mathrm{r}^2\mathrm{n}\ \mathrm{tg}\frac{180°}{\mathrm{n}} = \mathrm{r}^2 3\ \mathrm{tg}\frac{180°}{3} = 3\mathrm{r}^2\ \mathrm{tg}60 = 3\sqrt{3}r^2$

ә) n=4 болғанда, $S = \mathrm{r}^2\mathrm{n}\ \mathrm{tg}\frac{180°}{\mathrm{n}} = \mathrm{r}^2 4\ \mathrm{tg}\frac{180°}{4} = 4\mathrm{r}^2\ \mathrm{tg}45 = 4r^2$

б) n=5 болғанда, $S = \mathrm{r}^2\mathrm{n}\ \mathrm{tg}\frac{180°}{\mathrm{n}} = \mathrm{r}^2 5\ \mathrm{tg}\frac{180°}{5} = 5\mathrm{r}^2\ \mathrm{tg}36$

в) n=6 болғанда, $S = \mathrm{r}^2\mathrm{n}\ \mathrm{tg}\frac{180°}{\mathrm{n}} = \mathrm{r}^2 6\ \mathrm{tg}\frac{180°}{6} = 6\mathrm{r}^2\ \mathrm{tg}30 = 2\sqrt{3}r^2$

....

n=10 болғанда, $S = \mathrm{r}^2\mathrm{n}\ \mathrm{tg}\frac{180°}{\mathrm{n}} = \mathrm{r}^2 10\ \mathrm{tg}\frac{180°}{10} = 10\mathrm{r}^2\ \mathrm{tg}18$

…………………………………………………………………

n=100 болғанда, $S = \mathrm{r}^2\mathrm{n}\ \mathrm{tg}\frac{180°}{\mathrm{n}} = \mathrm{r}^2 100\ \mathrm{tg}\frac{180°}{100} = 100\mathrm{r}^2\ \mathrm{tg}1.8$

8. $\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2\mathrm{n}\ \sin\frac{360°}{n}}$ *формуласы дұрыс көпбұрыштың ауданын көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы арқылы табу формуласы.*

а)n=3 болғанда, $S = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2\mathrm{n}\ \sin\frac{360°}{n} = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2 3\ \sin\frac{360°}{3} = \frac{3}{2}\mathrm{R}^2\ \sin 120 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\mathrm{R}^2$

ә) n=4 болғанда, $S = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2\mathrm{n}\ \sin\frac{360°}{n} = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2 4\ \sin\frac{360°}{4} = 2\mathrm{R}^2\ \sin 90 = 2\mathrm{R}^2$

б) n=5 болғанда, $S = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2\mathrm{n}\ \sin\frac{360°}{n} = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2 5\ \sin\frac{360°}{5} = \frac{5}{2}\mathrm{R}^2\ \sin 72$

в) n=6 болғанда, $S = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2\mathrm{n}\ \sin\frac{360°}{n} = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2 6\ \sin\frac{360°}{6} = 3\mathrm{R}^2\ \sin 60 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{R}^2$

....

n=10 болғанда, $S = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2\mathrm{n}\ \sin\frac{360°}{n} = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2 10\ \sin\frac{360°}{10} = 5\mathrm{R}^2\ \sin 36$

……………………………………………………………………………………

n=100 болғанда, $S = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2\mathrm{n}\ \sin\frac{360°}{n} = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2 100\ \sin\frac{360°}{100} = 50\mathrm{R}^2\ \sin 3{,}6$

Бұл формуланы жатқа білетін білім алушы дұрыс үшбұрышқа, шаршыға, дұрыс алтыбұрышқа және басқа да дұрыс көпбұрыштарға іштей сызылған шеңбердің радиустарын көп қиналмайақ таба алады.

Мұндай жағдайларға, дұрыс көпбұрыштың қабырғасын оған іштей және сырттай сызылған шеңбер радиустары арқылы табу мәселесінде ($a = 2r\ tg\frac{180°}{n}$ *және* $a = 2Rsin\frac{180°}{n}$) жатқызуға болады. Алайда, бұл жағдайлар жоғарыдағы төртінші және бесінші пункттерден туындайтын болғандықтан, бұл мәселелерге тоқталғанды артық деп есептедік.

Пайдаланылған әдебиеттер:

1 Погорелов А.В. Геометрия: Орта мектептің 7-11 сыныптарына арналған оқулық. 4 басылым - Алматы: «Мектеп» баспасы, 2001. - 384 б.

2 Генденштейн Л.Э., Ершова А.П., Ершова А.С. Наглядный справочник по математике с примерами. Для абитурентов, школьников, учителей. - М.: Илекса, 2005. -192 с.