ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ҒЫЛЫМДАРЫ – PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

МРНТИ 14.25.07

Л.У. Жадраева, М. Т. Авакриева
[1]КазНПУ имени Абая, г. Алматы, Казахстан
[2]Институт математики, физики и информатики, г. Алматы, Казахстан

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛАМ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Аннотация. В данной статье рассмотрены методические особенности обучения интегральному исчислению в общеобразовательной школе, выделены этапы изучения теоретического материала, способствующие формированию понятий «первообразная» и «интеграл». Приведены примеры и задачи, активизирующие познавательную деятельность учащихся.

Авторы пришли к выводу о том, что при изучении темы «Первообразная и интеграл», необходимо:

- полноценное изучение важнейших элементов интегрального исчисления в старших классах в связи с огромной значимостью и важностью этого материала для учащихся;

- дальнейшая разработка методики преподавания интегрального исчисления с помощью подбора и решения практических задач, позволяющих учащимся наглядно представить в «объеме», и, следовательно, легче усвоить новые вводимые понятия, такие как «Первообразная» и «Интеграл», в школьном курсе алгебры и начала анализа.

Ключевые слова: интеграл, первообразная, площадь поперечного сечения, криволинейная трапеция, практические задачи.

***

Аңдатпа. Бұл мақалада орта мектепте алғашқы және интегралдық зерттеу әдістемелік мүмкіндіктерін сипаттайды. «Алғашқы» және «Интеграл» ұғымдарының қалыптасуына ықпал ететін, теориялық материалды зерттеу кезеңдерін атап өтті. Тапсырмаларының үлгілері оқушылардың танымдық белсенділігін арттыру ықпал етеді.

Авторлар «Ажырамас және интегралды» зерттеу барысында төмендегі тұжырымдарға келді:

- оқушылар үшін бұл материалдың маңыздылығы салдарынан жоғары сыныптарда интергралды есептеу элементтерін толық зерттеу, оқу;
- алгебра мен анализ бастамасы мектеп курсында «Ажырамас» және «Интеграл» жаңа ендірілген түсініктерді үйрену оңай, яғни «көлемін» ескере отырып таңдау көмегімен интегралдық есептеу үйрету бойынша және тәжірибелік мәселелерді шешу методикасын одан әрі дамыту.

Кілт сөздер: интеграл, «алғашқы», қисық сызықты трапеция, практикалық тапсырмалар, көлденең қимасының ауданы.

***

Abstract. In this article we consider methodical features of study of integral calculus at general schools, we formulate the stages of studies of theoretical material, assisting forming concepts “antiderivative” and “integral”. We suggest examples and tasks, assisting activation of cognitive activity of students.

The authors make the conclusion that during studying the topic “Antiderivative and integral” it is necessary:

- real full-blown studying the most impotant elements of integral calculus in high school because of its valuability and importance for students;

- further developing methodic of teaching integral calculus by choosing the set of exercises, which allows intuitively clear understand this topic: such notions as antiderivative and integral in the school subject of algebra and basics off analysis.

Key words: integral, antiderivative, cross-sectional area, curvilinear trapezium, practical problems.

Современное общество ставит перед школой задачу профилизации будущих выпускников. Главной целью обучения является обеспечение общедоступности для учащихся получения полноценного образования в соответствии с их индивидуальными склонностями и потребностями, обеспечение профессиональной ориентации и самоопределения обучающихся, установление преемственности между общим и профессиональным образованием [1]. В связи с этим, необходимым условием создания образовательного пространства, способствующего самоопределению учащегося, является введение профильной подготовки. Так в нашей республике обучение в старших классах проводится по двум направлениям: ОГН (общественно-гуманитарное направление) и ЕМН (естественно-математическое направление). В курсе алгебры и начал анализа на изучение интегрального исчисления по этим двум направлениям отводится соответственно 17 и 13 часов.

С методической точки зрения мы считаем, что перед введением понятия первообразной целесообразно повторить с учащимися взаимообратные операции: сложение – вычитание; умножение – деление; возведение в степень – извлечение корня n-ой степени; потенцирование – логарифмирование. Далее, поскольку учащимся известна операция дифференцирования, уместно задать учащимся вопрос: существует ли операция, обратная дифференцированию? После этого учащимся можно предложить заполнить таблицу нахождения производных функций и ответить на вопрос: можно ли представить обратную операцию, т.е. восстановить функцию по ее производной? Действительно, такая операция существует, она называется интегрированием.

Мы предлагаем при введении понятия «Интеграл» так же, как и при введении понятия «Производная», рассмотреть конкретную задачу, которая позволит учащимся понять практическое значение нового вводимого понятия. К числу таких задач следует, прежде всего, отнести задачу о нахождении площади фигуры или задачу о работе переменной силы. Обе эти задачи рассматриваются в школьных учебниках: вторая относится к необязательному материалу [2]. Что касается первой задачи, то она позволяет не только ввести понятие интеграла, но и позже использовать формулу Ньютона – Лейбница для вычисления площади криволинейной трапеции. Рассмотрим некоторые задачи на вычисление площадей плоских фигур и объёмов различных нестандартных тел. Надо отметить, практические задачи способствуют более глубокому и прочному усвоению учащимися нового понятия, позволяют соотнести примеры из жизни с задачами, решаемыми на уроках математики.

Так, при решении задачи на проектирование гидроэлектростанции учащимся можно предложить вычислить расход воды в реке. Для этого им необходимо вычислить количество воды, протекающей через данное поперечное сечение реки в единицу времени. Расход воды есть произведение площади поперечного сечения на скорость течения реки. Скорость течения определить нетрудно, сложнее найти площадь поперечного сечения. Для этого разрежем поперечное сечение на элементарные полоски, каждую из которых можно приближённо заменить прямоугольником. Сумма площадей этих прямоугольников и даст нам приближённое значение площади сечения. Чем больше разрезов мы сделаем, тем более точное значение площади получим.

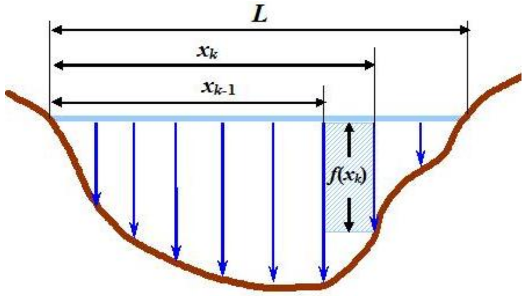

Рис.1

Итак, приступим к решению нашей задачи (рис. 1).

Пусть, L – ширина реки в данном месте. Измерим её глубину в точках, находящихся на расстоянии $x_0, x_1, \ldots, x_n$ от берега ($x_0 = 0$, $x_n = L$). Пусть на расстоянии x_k от берега глубина реки равна $h(x_k)$. Тогда площадь поперечного сечения приблизительно равна:

$$S_{\text{попер. сеч.}} \approx h(x_1)(x_1 - x_0) + h(x_2)(x_2 - x_1) + \ldots + h(x_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Аналогичную формулу можно применить для вычисления площади геометрической фигуры ABCD, изображённой на рисунке 2. Фигура, ограниченная графиком неотрицательной непрерывной функции $y = f(x)$, определённой на отрезке [a; b], осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$, называется криволинейной трапецией.

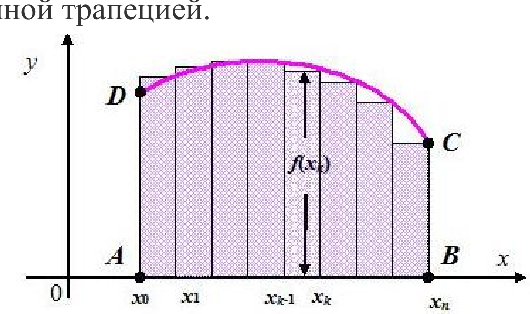

Рис.2

$$S_{\text{крив. трапеции}} \approx f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Чем гуще расположены точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ на отрезке AB, тем более точное значение площади фигуры ABCD даёт эта формула. Такое объяснение учебного материала наиболее приближенно к изучению вузовского курса математического анализа.

А теперь попробуем найти объём лимона (рис. 3).

Ясно, что ни одно из геометрических тел, изучаемых в школе (шар, цилиндр, конус и т.д.) на лимон не похоже. Но можно разрезать наш фрукт на тонкие ломтики (рис. 4) и найти их приблизительные объёмы. Для этого достаточно ровно обрезать край каждого ломтика (рис. 5), превратив его в низенький цилиндр, объём которого нетрудно сосчитать.

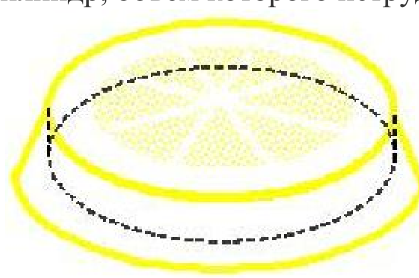

Рис.5

Приложив друг к другу полученные цилиндры, построим ступенчатое тело (рис. 6), объём которого равен сумме объёмов цилиндров. И чем тоньше будут ломтики, тем меньше объём тела будет отличаться от объёма лимона.

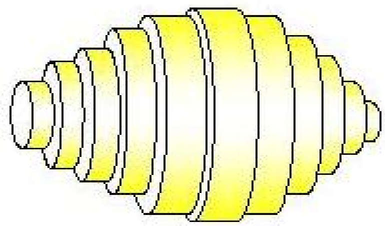

Рис.6

Такие же суждения можно применить и при определении объёма любого тела вращения. Разрежем тело вращения на тонкие «ломтики» и каждый «ломтик» заменяем цилиндром.

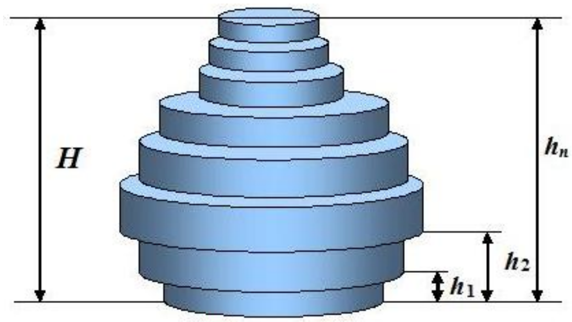

Рис.7

Чтобы найти объём полученного ступенчатого тела (рис.7), достаточно знать, как меняется площадь сечения с высотой. Пусть площадь сечения, проведенного на высоте h, равна S(h). Предположим, что тело разрезано на n частей сечениями, проведёнными на высотах h_0, h_1, … , h_n над плоскостью нижнего основания. (Плоскость нижнего основания совпадает с сечением на высоте h_0, а плоскость верхнего основания – с сечением на высоте h_n, т.е. $h_0 = 0$, $h_n = H$.) Площадь сечения на высоте h_k равна $S(h_k)$. Поэтому объём k-ого цилиндра будет равен $S(h_k)(h_k – h_{k-1})$ (так как его высота равна $h_k – h_{k-1}$). Складывая объёмы цилиндров, получим объём всего ступенчатого тела:

$$V_{\text{ступ. тела}} = S(h_1)(h_1 - h_0) + S(h_2)(h_2 – h_1) + \ldots + S(h_n)(h_n – h_{n-1}).$$

Чем тоньше будут «ломтики», тем ближе объём ступенчатого тела к объёму тела вращения.

Ясно, что при выведении формул площадей плоских фигур и объемов тел, учителю необходимо задавать наводящие вопросы, которые помогут учащимся выявить самим аналогии при сравнении процессов вычисления указанных мер.

На каждом этапе изучения темы «Первообразная и интеграл» в школьных учебниках рассматриваются задачи и упражнения, решение которых позволяет приобрести определенные навыки по вычислению интегралов [3,4]. Учащимся следует также показать, что применение интеграла не ограничивается вычислением площади криволинейной трапеции. Он применяется и при вычислении длины дуги, и при вычислении объема тела, при определении работы, скорости, длины пути. Целесообразно обратить внимание учащихся на то, что интеграл зависит только от вида подынтегральной функции и пределов интегрирования и не зависит от переменной интегрирования. Для активизации познавательной деятельности учащихся можно предложить самостоятельно доказать некоторые свойства интеграла, а также рассмотреть задачи из учебников геометрии и физики, в решении которых используется интеграл. Процесс обучения учащихся основам математического анализа будет более эффективным и способствующим совершенствованию умения учащихся самостоятельно применять понятие первообразной и интеграла в алгебре, физике, химии, экономике, если специально разработать методические схемы обучения учащихся каждому этапу и выделить приемы учебной работы по решению задач.

Список использованной литературы:

1 Закон Республики Казахстан «Об образовании» (с изменениями и дополнениями) №398-V ЗРК от 13 ноября 2015 г.)

2 Математическая энциклопедия. – М.: Издательство «Советская энциклопедия», 1979.

3 Абылкасымова А.Е., Жумагулова З.А. и др. Алгебра и начала анализа: учебник для 11 кл. / А.Е. Абылкасымова, З.А. Жумагулова и др. – Алматы: Мектеп, 2015. – 224 с.

4 Шыныбеков А. Алгебра и начала анализа / А. Шыныбеков. – Алматы: Атамура, 2015. – 235 с.