ҒТАМР 27.03.02

Dzh.T. Kayinbaev[1], B.K. Sakhiyeva[2]
[1,2]Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan

КҮРДЕЛІ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУ ТӘСІЛДЕРІ

Аңдатпа. Жалпы орта білім беретін математика пәндері мазмұнындағы күрделі мәселелердің бірі тригонометриялық теңдеулерді шешу мәселесі. Біздің ойымызша оның екі себебі бар. Біріншісі, тригонометриялық мәселелердің түбі алгебралық мәселелер емес, геометриялық мәселелер. Алайда, тригонометриялық мәселелер геометрияға қарағанда Алгебрада немесе Алгебра және анализ бастамаларында көп қолданылады. Екіншіден, тригонометриялық мәселелермен жұмыс жасағанда қолданылатын формулалар өте көп. Және оның бәрін еске ұстау өте қиын.
Төменде, күрделі тригонометриялық есептерді шешудің әр түрлі тәсілдері сарапталады. Сол сияқты, бұл есептерді жалпы орта білім беретін мектеп математика пәндері мұғалімдері математика пәніне қызығушылық танытқан білім алушыларға ұсынса дұрыс болар еді деп ойлаймыз.

Түйін сөздер: Теңдеу, күрделі теңдеу, тригонометриялық теңдеу, теңдеудің шешімі, теңдеудің анықталу облысы, формула, тригонометриялық формулалар, модуль, артық түбір,тригонометриялық функциялардың мәндері, қарапайым тригонометриялық теңдеулердің шешімдерінің формулалары .

***

Аннотация. Одной из непростых проблем в содержаниях математических курсов среднего общего образования является решения тригонометрических уравнений. На наш взгляд, есть как минимум две причины данной проблемы. Во-первых, суть тригонометрических задач сводятся не к алгебраическим задачам, а больше к геометрическим. Но тем не менее, тригонометрические задачи широко используются в алгебре и в алгебре и начале анализа, нежели в геометрии. Во-вторых, существует множество формул, используемых при работе с тригонометрическими задачами. И все это очень трудно держать в памяти.
Ниже будут проанализированы различные подходы к решению сложных тригонометрических задач. Кроме того, мы думаем, что было бы правильно, если бы эти задачи были представлены учителями математики средней общеобразовательной школы обучающимся, заинтересованным в математике.

Ключевые слова: Уравнение, комплексное уравнение, тригонометрическое уравнение, решение уравнения, область определения уравнения, формула, тригонометрические формулы, модуль, лишний корень, значения тригонометрических функций, формулы решений простых тригонометрических уравнений .

***

Abstract. One of the difficult problems in the contents of mathematical courses of secondary general education is the solution of trigonometric equations. In our opinion, there are at least two reasons for this problem. Firstly, the essence of trigonometric problems is reduced not to algebraic problems, but more to geometric ones. But nevertheless, trigonometric problems are widely used in algebra and in algebra and the beginning of analysis, rather than in geometry. Secondly, there are many formulas used when working with trigonometric problems. And all this is very difficult to keep in mind.
Various approaches to solving complex trigonometric problems will be analyzed below. In addition, we think it would be right if these tasks were presented by secondary school mathematics teachers to students interested in mathematics.
Keywords: Equation, comlex equation, trigonometric equation, equation solution, equation definition area, formula, trigonometric formulas, module, extra root, values of trigonometric functions, formulas for solutions of simple trigonometric equations.

***

Тригонометрия (грек. trigōnon – үшбұрыш және metreo – өлшеу, демек, «Үшбұрышты өлшеу» деген мағына береді) – тригонометриялық функциялар және олардың геометрияда қолданылуы жайлы мәселелерді зерттейтін математиканың саласы. Яғни, тригонометрия – ол математиканың бөлімдері болып табылатын, «Алгебраның» немесе «Алгебра және анализ бастамаларының», тіпті «Геометрияның» қандайда бір саласы емес. Ол, математиканың аты аталған салаларымен бір деңгейде тұрған бір бөлімі. Сондықтан, тригонометрия көптеген елдерде, сол сияқты кезіндегі Кеңес Одағында да жиырмасыншы ғасырдың, негізінен соңғы ширегіне дейін жалпы білім беретін орта мектептерде болсын, жоғары оқу орындарында болсын жеке пән ретінде қарастырылған, оқытылған. «Тригонометрия» терминін неміс ғалымы, Бартоломеус Питискус (1561—1613 жылдарда өмір сүрген), 1595 жылы, осындай атпен математикалық кітап шығару негізінде өмірге, ғылыми айналымға алып келді. Алайда, тригонометриялық материалдарды адамдар ерте заманда-ақ қолданған. Атап айтқанда, ерте заманда, тригонометриялық материалдар астрономияда, архитектурада, геодезияда, геометрияда қолданылса бұл күндерде тригонометриялық материалдар физика мен инжерияда, географияда және т.б салаларда кең қолданылады. Ал, математиканың өз ішінде тригонометрия қолданылмайтын саланы табу қиын. Тригонометрия – «Сандар» теориясында(Комплекс санның тригонометриялы түрі, Эйлер формуласы), Геометрияда (Үшбұрыштардың бұрыштары мен қабырғаларын табуда, Синустар және Косинустар, Тангенстер теориясы және т.б), Алгебраның, Алгебра және анализ бастамаларының өрнектерін түрлендіруде, теңдеулері мен теңсіздіктерін шешуде кең қолданылады.

Тіпті, тригонометрияның «Сфералық тригонометрия» деп аталатын саласы, Евклидтік болып табылмайтын, сфералық үшбұрыштардың бұрыштары мен қабырғаларының арасындағы тәуелділікті зерттейді.

Тригонометриялық теңдеулерді шешу мәселесіне арналған еңбектерді екі топқа бөлуге болады. Олар, жалпы кез келген теңдеулерді шешудің мәселелеріне арналған еңбектер[1,2,3,4,5] және тек қана тригонометриялық теңдеулерді шешу мәселесіне арналған еңбектер[6,7,8,9].

Жалпы білім беретін орта мектеп «Алгебра», «Алгебра және анализ бастамалары» пәндерінде тригонометриялық материалдар, «Негізгі тригонометриялық формулалар» деп аталатын төменгі алты формуладан бастау алып, ары қарай, «Келтіру формулалары», «Қосу формулалары», «Жарты бұрыштың формуласы», «Қос бұрыш, үш еселенген бұрыштың және т.б формулалары», «Дәрежені төмендету формулалары», «Тригонометриялық функцияларды қосу мен азайту формулалары», «Тригонометриялық функцияларды көбейту формулалары», «Әмбебап тригонометриялық қойылымдар немесе алмастырулар» деп он салаға бөлінеді.

Негізгі тригонометриялық формулалар,

$sin^2x + cos^2x = 1,$

$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}, \quad ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha},$

$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,$

$tg^2x + 1 = \frac{1}{cos^2x}, \; ctg^2x + 1 = \frac{1}{sin^2x}.$

Көп жағдайда, күрделі тригонометриялық теңдеулерді шешу төмендегідей алгоритм негізінде жүзеге асады:

1 Тригонометриялық теңдеулерді шешу барысында барлық алгебралық түрлендірулерді қолдануға болады (жақшаға алу, ортақ көбейткішті жақшадан шығару,қысқаша көбейту формулалары, дәрежеге шығару, түбірден шығару,көбейтіндінің нөлге тең болу жағдайы, квадрат теңдеуді шешу және т.б).

2 Егер тригонометриялық теңдеу модульда болса немесе иррационал болса алдымен модульдан немесе иррайионалдықтан құтылудың

жолын ойластыру(Ол үшін олармен эквивалентті арнаулы теңдеулер немесе теңдеулер жүйесі бар. Соларды пайдалану керек).

3 Берілген тригонометриялық теңдеуді басынан аяғына дейін шешудің толық алгоритмін бірден ойлап табу өте қиын. Сондықтан оған тырыспаған жөн. Одан да берілген теңдеуді қарапайым түрге біртіндеп, қадам қадаммен келтіру жолын іздеу керек.

4 Тригонометриялық теңдеудің мүмкін болатын мәнін есепшығарудың өн бойында көңілде тұру керек.

5 Тригонометриялық теңдеуді шешу барысында әрбір тригонометриялық функциялардың қасиеттері көңілде тұру керек.

6 Тригонометриялық теңдеудің көбі біртекті тригонометриялық теңдеулер болып келетіні яғни біртекті теңдеулерді шешу тәсілдерінің мұнда жиі қолданылатынын ескеру қажет.

Төменде осы жағдайлардың нақты іске асу жағдайлары мысалдарды шешу негізінде көрсетіледі.

1. $\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{13}{8}\cos^2 2x$ теңдеуінің $270^{\circ} < x < 320^{\circ}$ аралығындағы шешімін табыңыз.

$a = \cos^2 x, b = \sin^2 x$ деп белгілеу енгізіп алайық.

$\cos^6 x - \sin^6 x = (a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 - ab + b^2)$

$\cos^2 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = (a-b)^2$

$$(a-b)(a^2 - ab + b^2) = \frac{13}{8}(a-b)(a-b)$$

$$(a-b)(a^2 - ab + b^2) - \frac{13}{8}(a-b)(a-b) = 0$$

1. $(a-b) = \cos^2 x - \sin^2 x = 0$

$\cos^2 x - \sin^2 x = 0$

$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0$

$\cos x = \sin x \rightarrow \mathrm{tg} x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

$\cos x = -\sin x \rightarrow \mathrm{tg} x = -1 \rightarrow\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

2. $(a^2 - ab + b^2) - \frac{13}{8}(a-b) = 0$

$$(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) - \frac{13}{8}(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$(\cos^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x - 3\cos^2 x \sin^2 x) - \frac{13}{8}(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$((\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 3\cos^2 x \sin^2 x) - \frac{13}{8}(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\left(1 - \frac{3\sin^2 2x}{4}\right) - \frac{13}{8}(\cos 2x) = 0$$

$$\sin 2x = \frac{2tgx}{1 + tg^2 x}$$

$\cos 2x = \dfrac{1 - tg^2x}{1 + tg^2x}$

$\left(1 - \dfrac{3 * 4tg^2x}{4(1 + tg^2x)^2}\right) - \dfrac{13}{8} * \dfrac{1 - tg^2x}{1 + tg^2x} = 0$

$\left(\dfrac{8(1 + tg^2x)^2 - 24tg^2x - 13(1 - tg^4x)}{8(1 + tg^2x)^2}\right) = 0$

$21tg^4x - 8tg^2x - 5 = 0$ $\qquad (1 + tg^2x)^2 \neq 0 \rightarrow 1 + tg^2x \neq 0 \rightarrow$

$tg^2x \neq -1 \rightarrow \emptyset$

$tg^2x = a$

$21a^2 - 8a - 5 = 0$

$D = 484$

$a_1 = \dfrac{5}{7}, a_2 = -\dfrac{1}{3}$

$tg^2x = \frac{5}{7} \rightarrow tgx = \pm\sqrt{\frac{5}{7}} \rightarrow x = \pm arctg\sqrt{\frac{5}{7}} + \pi k, k \in \mathrm{Z}$

$tg^2x = -\frac{1}{3} \rightarrow \emptyset$

Сонымен берілген теңдеудің шешімі алынды. Енді берілген аралықтағы х-тің мәнін табайық:

1. $\mathrm{x} = \frac{\pi}{4} + \pi \mathrm{k}, \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$

$k = 0{:}\ x = \frac{\pi}{4}$ берілген аралықта жатпайды;

$\mathrm{k} = -1{:}\ \mathrm{x} = -\frac{3\pi}{4}$ берілген аралықта жатпайды;

$\mathrm{k} = -2{:}\ \mathrm{x} = -\frac{7\pi}{4}$ берілген аралықта жатпайды;

$\mathrm{k} = 1{:}\ \mathrm{x} = \frac{5\pi}{4}$ берілген аралықта жатпайды;

$\mathrm{k} = 2{:}\ \mathrm{x} = \frac{3\pi}{4}$ берілген аралықта жатпайды.

2. $\mathrm{x} = -\frac{\pi}{4} + \pi \mathrm{n},\ \mathrm{n} \in \mathrm{Z}$

$\mathrm{k} = 0{:}\ \mathrm{x} = -\frac{\pi}{4}$ берілген аралықта жатпайды;

$\mathrm{k} = -1{:}\ \mathrm{x} = -\frac{5\pi}{4}$ берілген аралықта жатпайды;

$\mathrm{k} = -2{:}\ \mathrm{x} = -\frac{9\pi}{4}$ берілген аралықта жатпайды;

$\mathrm{k} = 1{:}\ \mathrm{x} = \frac{3\pi}{4}$ берілген аралықта жатпайды;

$\mathrm{k} = 2{:}\ \mathrm{x} = \frac{7\pi}{4}$ берілген аралықта жатады.

3. $x = \pm arctg\sqrt{\frac{5}{7}} + \pi k, k \in \mathrm{Z}$

$\mathrm{k} = 0{:}\ \mathrm{x} = \pm arctg\sqrt{\frac{5}{7}}$ берілген аралықта жатпайды;

$\mathrm{k} = -1{:}\ \mathrm{x} = \pm arctg\sqrt{\frac{5}{7}} - \pi$ берілген аралықта жатпайды;

$k = -2$: $x = \pm arctg\sqrt{\frac{5}{7}} - 2\pi$ берілген аралықта жатпайды;

$k = 1$: $x = \pm arctg\sqrt{\frac{5}{7}} + \pi$ берілген аралықта жатпайды;

$k = 2$: $x = \pm arctg\sqrt{\frac{5}{7}} + 2\pi$ берілген аралықта жатпайды.

Жауабы: 315°.

2. $2\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} - 2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3\frac{\sin x}{\cos x} = 3, 0 \le x \le 360^{\circ}$,

$\frac{\sin x}{\cos x} = t$ деп белгілеу енгізіп аламыз;

$2t^3 - 2t^2 + 3t = 3$,

$2t^3 - 2t^2 + 3t - 3 = 0$,

$2t^2(t-1) + 3(t-1) = 0$,

$(2t^2 + 3)(t-1) = 0$,

$(2t^2 + 3)(t-1) = 0$,

$t^2 = -\frac{3}{2} \rightarrow \emptyset$,

$t = 1$,

$tgx = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \epsilon Z$,

Енді берілген аралықтағы x-тің мәндерін табайық:

$k = 0: x = \frac{\pi}{4}$;

$k = 1: x = \frac{5\pi}{4}$;

k-ның қалған мәндерінде x-тің мәні берілген аралықта жатпайды, сондықтан теңдеудің екі түбірі бар.

Жауабы: 2 түбірі бар.

3. $\cos^{1977}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^{1995} 7x = 2$,

$(\cos(\frac{\pi}{2} - x))^{1977} + \sin^{1995} 7x = 2$,

$\sin^{1977} x + \sin^{1995} 7x = 2$,

$|\sin x| \le 1$ және $|\sin 7x| \le 1$ болғандықтан, теңдік тек бір жағдайда ғана орындалады:

$\sin^{1977} x = 1 \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

$\sin^{1995} 7x = 1 \rightarrow \sin 7x = 1 \rightarrow 7x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,,\ n \in Z\ x_2 = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7},\ k \in Z$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7} \rightarrow k = 7n + \frac{3}{2}$

Соңғы теңдік ешқандай бүтін n,k сандарымен орындалмайды. Демек, есептің шешімі жоқ.

Жауабы: Шешімі жоқ.

4. $3\cos 4x + 2\cos 2x(10\cos^4 x + 3\cos^2 x + \sin^2 x) + 3 = 0$

$3\cos 4x + (4\cos^2 x - 2)(10\cos^4 x + 2\cos^2 x + 1) + 3 = 0$

$3\cos 4x + 40\cos^6 x + 8\cos^4 x + 4\cos^2 x - 20\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$

$3\cos 4x + 40\cos^6 x - 12\cos^4 x + 1 = 0$

$\sin^2 2x = \dfrac{1 - \cos 4x}{2}$

$4\sin^2 x\cos^2 x = \dfrac{1 - \cos 4x}{2}$

$\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$

$3 - 24\sin^2 x\cos^2 x + 40\cos^6 x - 12\cos^4 x + 1 = 0$

$3 - 24\cos^2 x + 24\cos^4 x + 40\cos^6 x - 12\cos^4 x + 1 = 0$

$3 - 24\cos^2 x + 12\cos^4 x + 40\cos^6 x + 1 = 0$

$4(\cos^2 x + 1)(2\cos^2 x - 1)(5\cos^2 x - 1) = 0$

$(\cos^2 x + 1)(2\cos^2 x - 1)(5\cos^2 x - 1) = 0$

1.$\cos^2 x = -1 \ \rightarrow \emptyset$

2. $2\cos^2 x - 1 = 0 \ \rightarrow 2\cos^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \ \rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \rightarrow$ $\cos 2x = 0 \rightarrow$

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

$\cos x = \pm\frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow x = \pm \arccos\frac{\sqrt{5}}{5} + 2\pi k, k \in Z.$

Жауабы: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z, x = \pm \arccos\frac{\sqrt{5}}{5} + 2\pi k, k \in Z.$

5. $\sqrt{1 - \sin 2x} = \sin 3x + \cos 3x$, теңдеуінің $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ аралығындағы түбірлерінің санын табыңыз.

$1 - \sin 2x = \sin^2 3x + 2\sin 3x\cos 3x + \cos^2 3x,$

$1 - \sin 2x - \sin^2 3x - 2\sin 3x\cos 3x - \cos^2 3x = 0$

$\cos^2 3x = (4\cos^3 x - 3\cos x)^2 = 16\cos^6 x - 24\cos^4 x + 9\cos^2 x$

$\sin^2 3x = (3\sin x - 4\sin^3 x)^2 = 16\sin^6 x - 24\sin^4 x + 9\sin^2 x$

$$2\sin 3x\cos 3x = 2(4\cos^3 x - 3\cos x)(3\sin x - 4\sin^3 x) = \\ = 24\cos^3 x\sin x - 32\cos^3 x\sin^3 x - 18\cos x\sin x + 24\sin^3 x\cos x$$

Осы теңдіктерді соңғы теңдеуге қойып ықшамдасақ:

$-8 - 16(\cos^3 x - \sin^3 x)^2 - 8\cos x\sin x + 24(\cos^4 x + \sin^4 x) = 0,$

$-32\cos x\sin^2\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)\sin x\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$

$\cos x\sin^2\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)\sin x\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$

$\cos x = 0 \ \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z,$

$$\sin^2\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \ \rightarrow \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \ \rightarrow \ -x + \frac{\pi}{4} = \pi k, k\epsilon Z \ \rightarrow x \\ = \frac{\pi}{4} - \pi k, k\epsilon Z,$$

$\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \ \rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \ \rightarrow \ x - \frac{\pi}{4} = \pi k, k\epsilon Z \ \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z,$

$\sin x = 0 \ \rightarrow x = \pi k, k\epsilon Z$

Жауабы: 2 түбірі болады: $k = 1 \ \rightarrow x = \frac{3\pi}{2}, k = 2 \ \rightarrow x = 2\pi.$

6. $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x=|\cos x|,$

$\sqrt{2}\,(\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4})-\sin x=|\cos x|,$

$\cos x-\sin x-\sin x=|\cos x|,$

$\cos x-2\sin x=|\cos x|,$

1.

$\cos x-2\sin x=\cos x,$

$-2\sin x=0,$

$\sin x=0,$

$x=\pi n, n\in Z;$

$$\cos x\geq 0\ \rightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]\ \rightarrow x=2\pi n, n\in Z.$$

2. $-(\cos x-2\sin x)=\cos x,$

$2\sin x=2\cos x,$

$tg x=1,$

$x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z;$

$\cos x<0\ \rightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]\ \rightarrow x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n, n\in Z.$

Жауабы: $x_1=2\pi n, n\in Z;\ x_2=\frac{5\pi}{4}+2\pi n, n\in Z.$

7.

$\log_4\left(\frac{x-14}{\sin x}\right)=\log_4\left((x-14)\sin x\right),$

$\left(\frac{x-14}{\sin x}\right)=\left((x-14)\sin x\right),$

$\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\sin x,$

$\sin^2 x=1,$

$\sin x=\pm 1,$

$x=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z.$

Жауабы: $x=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z.$

8. $\begin{cases}3x+4\sin y=-11\\ -2x+5\sin y=\frac{7}{2}\end{cases}$

$\sin y=t$

$\begin{cases}3x+4t=-11\\ -2x+5t=\frac{7}{2}\end{cases}$

$\begin{cases}6x+8t=-22\\ -6x+15t=\frac{21}{2}\end{cases}$

Жүйедегі екі теңдеуді қосамыз:

$23t=-\frac{23}{2}$

$t = -\frac{1}{2} \rightarrow \sin y = -\frac{1}{2} \rightarrow y = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z,$
$x = -3.$
Жауабы: $y = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z, x = -3.$
9. $\mathrm{tg}x(1 - 2\sin x) - 2\cos x = -\sqrt{3}$
$\mathrm{tg}x - 2\sin x\,\mathrm{tg}x - 2\cos x = -\sqrt{3}$
$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{2\sin^2 x}{\cos x} - 2\cos x = -\sqrt{3}$$
$$\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} - \frac{2 - 2\cos^2 x}{\cos x} - \frac{2\cos^2 x}{\cos x} = -\frac{\sqrt{3}\cos x}{\cos x}$$
$$\sqrt{1-\cos^2 x} - 2 + 2\cos^2 x - 2\cos^2 x = -\sqrt{3}\cos x$$
$4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 3 = 0$
$D = 0$
$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$
$\cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \epsilon Z.$
$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \rightarrow$ түбірі теңдеудің шешімі бола алмайды.
Жауабы: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$
10. $\mathrm{tg}(4\sin x) = \sqrt{3}$
$4\sin x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \epsilon Z,$
$\sin x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4}, k \epsilon Z$
$|\sin x| \leq 1$ болғандықтан онда келесідей шешім бола алады:
$k = -2: \sin x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{4} = -\frac{5\pi}{12} < -1$ сәйкес келмейді;
$k = -1: \sin x = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} > -1$,
$\sin x = -\frac{\pi}{6} \rightarrow x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k, k \epsilon Z,$
$k = 0: \sin x = \frac{\pi}{12} < 1$,
$x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \pi n, n \epsilon Z,$
$k = 1: \sin x = \frac{\pi}{3} > 1$ шешімі жоқ.
Шешімі: $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k, k \epsilon Z, x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \pi n, n \epsilon Z.$

Жоғарыда айтылған мәселелерді қорытындылай келе айтарымыз:

1. Тригонометриялық материалдар әсіресе тригонометриялық формулалар өте көп. Оның үстіне, бір тригонометриялық теңдеуді шешу барысында бірнеше формуланы қолдануға болады. Ал, есеп шығарушы тиімді формуланы таба алмаса біраз әуре болып бастапқа теңдеуге қайтып келетін

жағдайлар көптеп кездеседі. Сондықтан, тригонометриялық формулалардың нақты теңдеу түрін шешуге тиімдісін анықтау үшін, үлкен тәжірибе керек. Ол дегеніміз, әрбір білім алушы тригонометриялық теңдеулерді шешуді үйрену үшін өте көп көлемдегі теңдеулерді шешу керек.

2. Тригонометриялық материалдар нақты айтқанда, тригонометриялық формулалардың бір бірінен туындайтын жағдайларын, тригонометриялық теңдеулерді шешу тәсілдерін, әсіресе тригонометриялық теңдеулердің түбірлерінің «жоғалып» кетуін немесе «артық» түбірдің пайда болу жағдайларын терең талдайтын оқу құралын шығару қажет деп есептейміз.

Пайдаланған әдебиеттер тізімі

1 Қайыңбаев Ж.Т. Жаттығу, есеп ... «Математика және Физика журналы» №3, 2017. 2-4 б.
2 Гусев В.А., Мордкович А. Г. Математика: Справ. материалы – М.: Просвещение, 1999. – 416 с.
3 Титаренко А.М. 6000 задач по математике от простейших до олимпиадных. – Ростов н/Д: Феникс, 2011. – 432 с.
4 Кулагин Е.Д. и др 3000 конкурсных задач по математике. – М., 2003. – 380 с.
5 Бидосов Ә. Математиканы оқыту әдістемесі: Оқу құралы. 2-ші басылым. – Алматы, 2007. – 262 б.
6 Далингер В. А. Математика: тригонометрические уравнения и неравенства : учеб. Пособие для СПО / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 136 с. — (Серия : Профессио нальное образование).
7 Кара-Сал Н.М. Решение некоторых видов тригонометрических уравнений в школьном курсе математики / Н.М.Кара-Сал // Вестник Тувинского государственного университета. – 2011. - №4. – С. 9-15.
8 Суханова Н.В. Средства формирования исследовательской компетенции обучающихся 10 класса при обучении решению тригонометрических уравнений и неравенств с параметрами, / Н.В.Суханова, Г.Ф.ДЖабиева //Вестник Южно-Уральского государственного гуманитарно-педагогического университета. – 2019. - №2. – С. 179-193.
9 Кутмина К.С. Разработка дистанционного курса для старшеклассников по решению тригонометрических уравнений и неравенств: диссертация канд.пед.наук: зазащищена 25.06.2020/ Кутмина Кристина Сергеевна.-Барнаул, 2020. -50 с.