ҒТАМР 27.03.02

B.Sydykhov[1], Dzh.T.Kayinbaev[2], A.S.Ismukhambetova[3]
[1,2,3]Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan

ТРАПЕЦИЯҒА БАЙЛАНЫСТЫ КҮРДЕЛІ ЕСЕПТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ШЕШУ ТӘСІЛДЕРІ

Аңдатпа. Мақала, элементар геометрия мазмұнындағы маңызды фигуралардың бірі болып табылатын трапецияға байланысты күрделі есептерді шешу жолдарын талқылауға арналған. Осы жағдайды жүзеге асыру үшін әр түрлі теоремаларды пайдалана отырып бірте бірте есепті шешу тәсілі, геометриялық есептерді шешудегі ұқсастық тәсілі, қосымша сызбалар сызу негізінде есепті шешу тәсілі, геометриялық есептерді алгебралық тәсілмен шешу тәсілі және т.б қолданылады. Сол сияқты, мақалада шеңберге трапецияның іштей және сырттай сызылу мүмкіндігіне байланысты күрделі есептерді шешу жолдары талқыланады. Мақала, математиканы оқыту әдістемесі саласының мамандарына, мұғалімдерге, докоранттар мен магистранттарға арналған.

Түйін сөздер: Төртбұрыш, төртбұрыштың түрлері, параллелограмм, трапеция, трапецияның түрлері, трапецияның қасиеттері, трапецияның элементтері,трапецияның ауданын табу формулалары, Менелай теоремасы, Птоломей теоремасы, шеңберге іштей және сырттай сызылған трапеция.

***

Аннотация. Статья посвящена обсуждению путей решения сложных задач, связанных с трапецией, которая является одной из важнейших фигур в содержании элементарной геометрии. Для реализации данной ситуации применяются метод постепенного решения задачи с использованием различных теорем, способ аналогии при решении геометрических задач, способ решения задачи на основе построение дополнительных чертежей, способ решения геометрических задач алгебраическим способом и др. Точно так же в статье обсуждаются пути решения сложных задач, связанных с возможностью вписать и описать окружности на трапецию. Статья предназначена для специалистов в области методики преподавания математики, учителей, докторантов и магистрантов.

Ключевые слова: Прямоугольник, виды прямоугольника, параллелограмм, трапеция, виды трапеции, свойства трапеции, элементы трапеции, формулы площади трапеции, теорема Менелая, теорема Птолемея, описанные и выписанные окружности на трапеция.

Annotation. The article is devoted to the discussion of ways to solve complex problems related to the trapezoid, which is one of the most important figures in the content of elementary geometry. To implement this situation, the method of gradual solution of the problem using various theorems, the method of analogy in solving geometric problems, the method of solving the problem based on the construction of additional drawings, the method of solving geometric problems in an algebraic way, etc. are used. Similarly, the article discusses ways to solve complex problems related to the tangential trapezoid.The article is intended for specialists in the field of methods of teaching mathematics, teachers, doctoral students and undergraduates.

Keywords: Rectangle, rectangle types, parallelograms, trapezoid, trapezoid types, trapezoid properties, trapezoid elements, trapezoid area formulas, Menelaus' theorem, Ptolemy's theorem, tangential trapezoid.

***

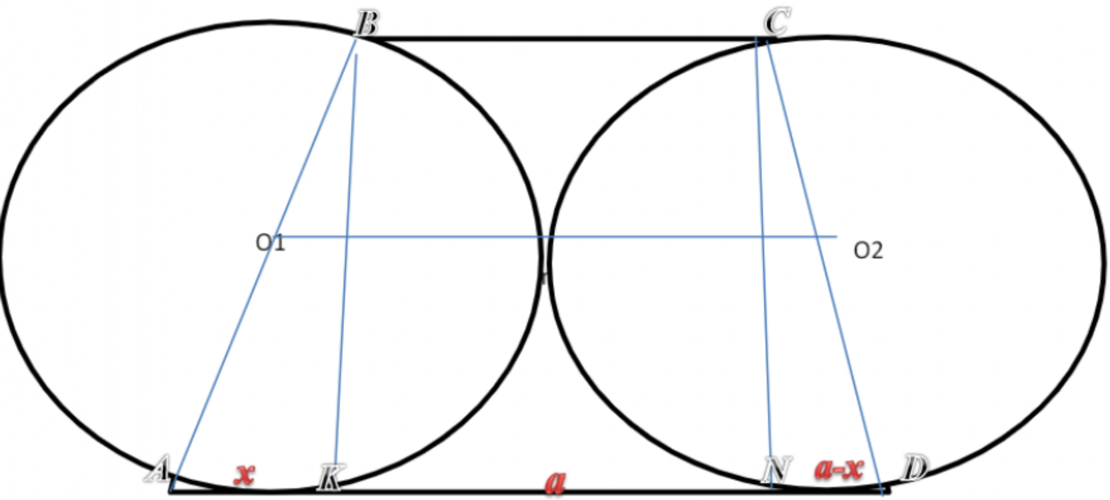
Евклидтің «Бастамалар» атты математикалық оқу құралында параллелограмнан басқа барлық төртбұрыштарды трапеция деп аталған. Екі мың жылдан артық бойы сақталған, мәнін жоймаған бұл жүйе бүгінде өз күшінде. Атап айтқанда, жалпы білім беретін орта мектеп геометрия пәнінде қарастырылатын төртбұрыштар екі үлкен топқа бөлінеді. Олар, параллелограмм және трапеция. Ал, тіктөртбұрыш, ромб және шаршы параллелограммның жеке жағдайлары екендігі белгілі. Демек, элементар геометрияда барлық төртбұрыштар бір төбе де, трапеция жалғыз өзі бір төбе ретінде қарастырылады. Бұл трапецияның маңызын, мәртебесін көрсетеді десек қателеспейміз[1,2,10,11,12].

Трапеция сөзін көне грек тілінен қазақ тіліне аударсақ, ол «стол» немесе «дастарқан, ас, тамақ» деген мағынаны береді. Ал, грек тіліндегі трапедзион сөзін қазақ тіліне сөзбе сөз аударсақ, «ас столы» дегенді білдіреді. Осы күндерде кез келген ас ішуде қолданылатын «трапеза» сөзі де осыдан туындаған. Бұл дегеніміз, ертеде грек елінде ас қоятын стол трапеция пішіндес болғандықтан туындаған жағдай[11,12].

Сол сияқты, күнделікті өмірде де, трапеция пішіндес тұрмыстық немесе техникалық мәселелер өте көп. Тіпті, ғылымның әр салаларында «Трапеция және архитектура», «Трапеция және космос», «Табиғаттағы трапеция» және т.б ұғымдар бар. Бұл мәселені ары қарай дамытатын болсақ, тіпті космостағы кейбір жағдайларды «Трапеция» атауымен байланыстырады. Мысалы, «Ориона трапециясы» және т.б.

Трапецияға байланысты күрделі есептерді шешу жолдары жайлы арнаулы тек қана осы мәселеге арналған еңбектер болмаса да, математиканы оқыту әдістемесі[10] немесе есептер жинақтарында[7,8] бұл мәселелер жайлы белгілі мөлшерде айтылған.

1. $ABCD$ трапециясының төменгі табаны жоғарғы табанынан есе үлкен және жоғарғы табаныны a-ға тең. Трапецияның бүйір қабырғалары 2 шеңбердің диаметрлері, ал табандары осы шеңберлерді жанап өтеді. Трапецияның табанындағы бұрыш 45° тең.Трапеция ауданын табу(сурет 1)



1 - сурет

Берілгені:

$ABCD$ - трапеция

$BC = a$

$AD = 2BC = 2a$

$\angle A = 45^{o}$

Табу керек

$S_{ABCD} = ?$

Шешуі:

1) $KN = a$, $AK = x$, $ND = a - x$

2) $AK = KB = x$, $AB = x\sqrt{2}$

$O_1B = O_1A = O_1M$ $R_1 = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$

3) $h = BH = CK = x$

ΔCKD

$$CD^2 = x^2 + (a - x)^2$$

$$CD^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$$

$$CD = \sqrt{2x^2 - 2ax + a^2} = 2R_2$$

$$O_2M = \frac{\sqrt{2x^2 - 2ax + a^2}}{2}$$

4) O_1O_2 - орта сызық

$$O_1O_2 = \frac{BC + AD}{2}$$

$$O_1M + MO_2 = \frac{a + 2a}{2}$$

$$\frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2x^2 - 2ax + a^2}}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$x\sqrt{2} + \sqrt{2x^2 - 2ax + a^2} = 3a$$

$$2x^2 - 2ax + a^2 = (3a - x\sqrt{2})^2$$

$$2x^2 - 2ax + a^2 = 9a^2 - 6ax\sqrt{2} + 2x^2$$

$$8a^2 + (2 - 6\sqrt{2})ax = 0$$

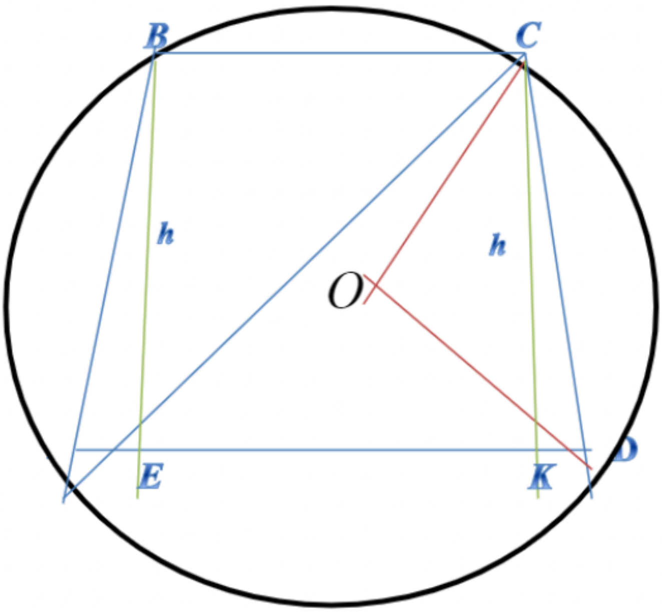
$$x = \frac{-8a^2}{(2 - 6\sqrt{2})a} = \frac{4a}{3\sqrt{2} - 1}$$

$$x = \frac{4a}{3\sqrt{2} - 1}$$

5) $S = \frac{a+b}{2} \times h = \frac{a + 2a}{2} \times \frac{4a}{(3\sqrt{2} - 1)} = \frac{6a^2}{3\sqrt{2} - 1}$

Жауабы: $S = \frac{6a^2}{3\sqrt{2} - 1} см^2$.

2.



2-сурет

Биіктігі h-қа тең, ал бүйір жағы сырттай сызылған шеңбердің центрінен 60° бұрышпен көрінетін, тең бүйірлі трапецияның ауданын есептеңіз (сурет 2).

Берілгені:

$ABCD$ - трапеция

$BE = CK = h$

$AB = CD$

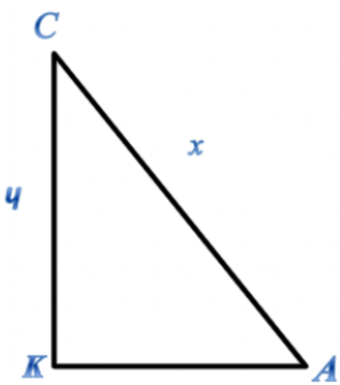
$\angle COD = 60^{o}$

Табу керек

$S_{ABCD} = ?$

Шешуі:

1



$$\frac{h}{\sin 30^{\circ}} = \frac{x}{\sin 90^{\circ}}$$

$$x = \frac{h}{\frac{1}{2}}$$

$$x = 2h$$

2) $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle COD = 30^{o}$ (Бір доғаға керілген ішкі бұрыш центрлік бұрыштың жартысына тең)

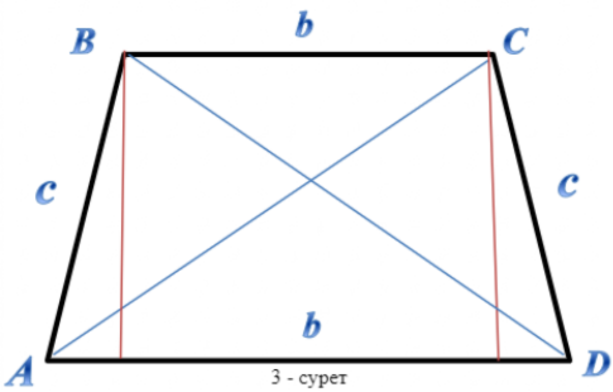
3)
$\Delta ACK : AC = 2CK = 2h$
$AC^{2} = AK^{2} + CK^{2}$
$AK^{2} = (2h)^{2} - h^{2}$
$AK = h\sqrt{3}$

4) $AD = AE + EK + KD$; $EK = BC$

$AK = KD + BC$; $KD = AE$

5)
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD)\times CK = \frac{1}{2}(BC + AE + EK + KD)\times CK = \frac{1}{2}(AK + AK)\times CK =$$
$$= AK \times CK = h\sqrt{3}\times h = h^{2}\sqrt{3}$$
Жауабы: $S_{ABCD} = h^{2}\sqrt{3}$

3.



3 - сурет

Теңбүйірлі $ABCD$ трапециясында AC диагоналы CD бүйір қабырғасына перпендикуляр. Егер бізге $AD = a$, $AB^{2} + BC^{2} = \frac{11}{16}a^{2}$ тең екендігі белгілі болса,онда BC қабырғасын табыңыз (сурет – 3).
Берілгені:
$ABCD$ - теңбүйірлі трапеция
$AD = a$

$AB^2 + BC^2 = \frac{11}{16}a^2$

$AC \perp CD$

Табу керек:

$BC = ?$

Шешуі:

$$b^2 + c^2 = \frac{11a^2}{16}$$

$$c^2 = \frac{11a^2}{16} - b^2$$

$$c^2 = (\frac{a-b}{a})a$$

$$\frac{11a^2}{16} - b = \frac{a^2 - ab}{2}$$

$$16b^2 - 8ab - 3a^2 = 0$$

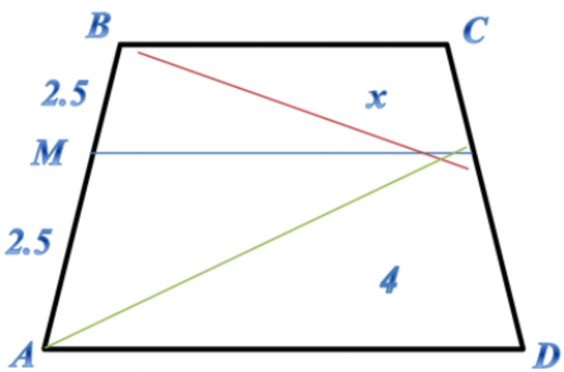
$$16b^2 - 8ab + a^2 - 4a^2 = 0$$

$$(4b - a - 2a)(4b - a + 2a) = 0$$

$$b = \frac{3a}{4} \qquad b = -\frac{a}{4}$$

Жауабы: $BC = \frac{3a}{4}$.

4.



$ABCD$ трапециясында BAD бұрышының биссектрисасы AD және BC негіздерімен CD қабырғасының ортасы M арқылы өтеді. $AB = 5$, $AM = 4$ тең екендігі белгілі. BM кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

Берілгені:

$ABCD$ - трапеция

$AB = 5$

$AM = 4$

BAD - биссектриса

Табу керек

$BM = ?$

Шешуі:

1) $\angle NAM = \angle NMA \rightarrow AN = NM$

2) $NM - \Delta BMA$ медианасы. Медиана формуласы бойынша

$$NM = \frac{\sqrt{2BM^2 + 2AM^2 - AB^2}}{2}$$

$$2.5 = \frac{\sqrt{2x^2 + 2\times 16 - 25}}{2}$$

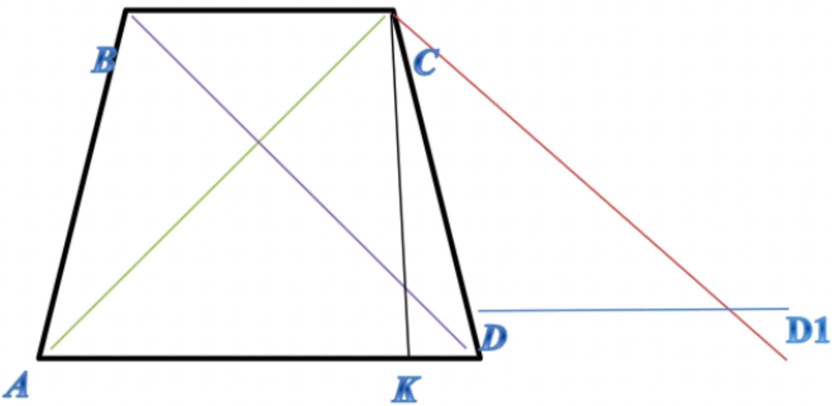
$$2x^2 + 7 = 25$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Жауабы: $BM = 3$ см.

5.



Трапецияның негіздерінің қосындысы 9-ға тең, ал диагоналдарының ұзындықтары 5 және $\sqrt{34}$-ке тең. Үлкен негізінің бұрышы сүйір. Трапецияның ауданын табыңыз.

Берілгені:

$ABCD$ - трапеция

$BC + AD = 9$

$AC = 5$

$BD = \sqrt{34}$

Табу керек:

$S_{ABCD} = ?$

Шешуі:

1) DD_1 мен BC тең болатындай етіп, AD -ны созамыз.

2) $DD_1 = BC$, $BC \,//\, DD_1 \Rightarrow BD \,//\, CD$

$BD = CD = \sqrt{34}$

3) $AD_1 = AD + DD_1 = AD + BC = 9$

4) $S_{\Delta ACD1} = \frac{1}{2} AD_1 \times CK$

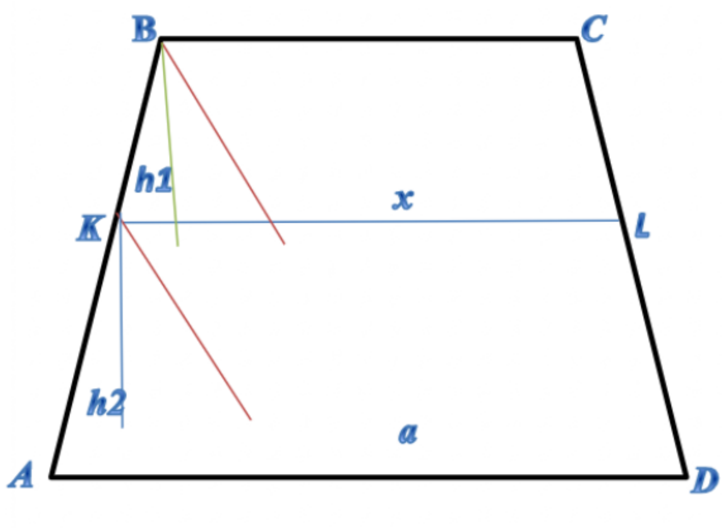
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} CK(BC + AD) = \frac{1}{2} AD_1 \times CK$$

$$S_{\Delta ACD1} = \sqrt{\frac{5+9+\sqrt{34}}{2} \times \frac{5+9+\sqrt{34}-10}{2} \times \frac{5+9+\sqrt{34}-18}{2} \times \frac{5+9+\sqrt{34}-2\sqrt{34}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{18 \times 162} = \frac{1}{4} \times 54 = 13.5$$

Жауабы: $S_{ABCD} = 13.5 см^2$

6.



Трапецияның параллель қабырғаларының ұзындықтарының қосындысы 288 -ге тең. Осы қабырғаларына параллель, трапецияның ауданын теңдей етіп бөлетін кесіндінің ұзындығын анықтаңыз.

Берілгені:

$ABCD$ - трапеция

$AD^2 + BC^2 = 288$

$KL \parallel BC$

$KL \parallel AD$

$S_{KBCL} = S_{AKLD}$

Табу керек:

$KL = ?$

Шешуі:

1) $BM \parallel CD$

$KN \parallel CD$

2) $h_1 = h_2$ жүргіземіз.

3) $KL = x \Rightarrow KM = x - BC = x - b; AN = a - x$

4) $\Delta AKN \approx \Delta KBM$

$$\frac{AN}{KM} = \frac{a-x}{x-b} = \frac{h_1}{h_2}$$

5) $S_{KBCL} = S_{AKLD} \Rightarrow \dfrac{a+x}{2} h_1 = \dfrac{b+x}{2} h_2 \Rightarrow$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{b+x}{a+x} = \frac{a-x}{x-b} \Rightarrow (x+b)(x-b) = (a+x)(a-x)$$

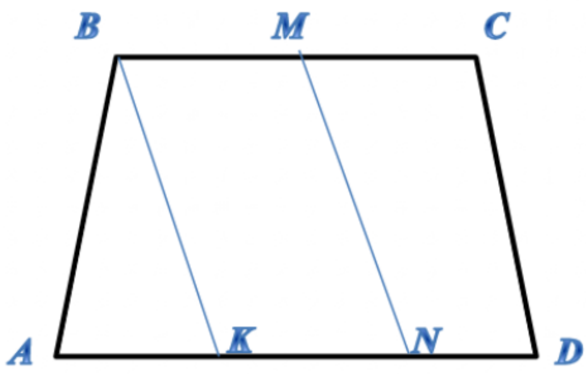
$x^2 - b^2 = a^2 - x^2$

$2x^2 = a^2 + b^2$

$$x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{288}{2}} = 12$$

Жауабы: $KL = 12$ см.

7.



Теңбүйірлі трапецияның бүйір қабырғасы 12 см-ге тең және оның негізімен 60° бұрыш жасайды. Трапецияның негіздері 16 см и 40 см-ге тең. Трапеция негіздерінің ортаын қосатын кесіндінің ұзындығын табыңыз.

Берілгені:

$ABCD$ - теңбүйірлі трапеция

$AB = CD = 12$ см

$AD = 40$ см

$BC = 16$ см

$\angle BAD = \angle ABC = 60^{\circ}$

Табу керек

$BK = MN = ?$

1) $\angle ABC = 60^{\circ}$ болған жағдайды қарастырамыз.

$BC \div 2 = 16 \div 2 = 8$ см

$AD \div 2 = 40 \div 2 = 20$ см

$KN = 8$ см

$AK = AN - KN = 20 - 8 = 12$ см

$AB = AK$

$\angle BAK = 60^{\circ}$

$\angle ABK = \angle BKA = 60^{\circ}$

$\angle BAK = 60^{\circ}$

ΔABK - теңқабырғалы үшбұрыш.

$BK = MN = 12$ см

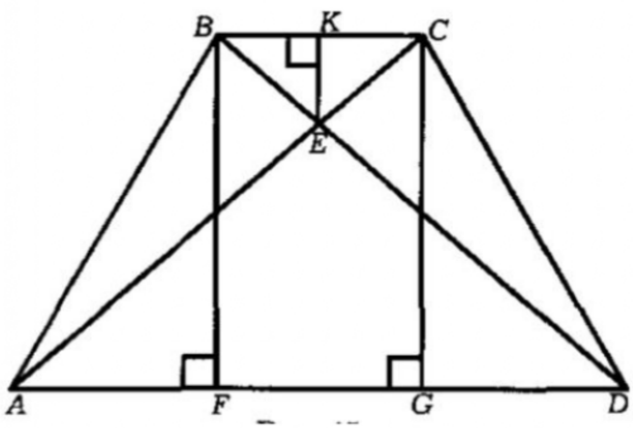
$BK \parallel MN$

2) $\angle BAD = 60^{\circ}$, $\angle ABC = 120^{\circ}$ болған жағдайды қарастырамыз. $AK = 40 \div 2 - 8 = 12$ см

$$BK = MN = \sqrt{2 \times 144 + 2 \times 144 \times \frac{1}{2}} = 12\sqrt{3}$$

Жауабы: $BK = MN = 12; 12\sqrt{3}$ см.

8.



$ABCD$ трапециясында $AD = 4$, $BC = 1$-ге тең негіздері мен $\angle A = arctg2$, $\angle D = arctg3$ бұрыштары берілген. CBE үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңыз, мұндағы E - диагоналдардың қиылысу нүктесі.

Берілгені:
$ABCD$ - трапеция

$AD = 4$ см

$BC = 1$ см

$\angle A = arctg2$

$\angle D = arctg3$

E - диагоналдардың қиылысу нүктесі.

Табу керек:

$r = ?$

Шешуі:

1) $AF = x$ деп алайық. Онда бізде $DG = AD - AF - FG = 4 - x - 1 = 3 - x$

2) $tg\angle A = \dfrac{BF}{AF} = 2 \to \dfrac{BF}{x} = 2 \to BF = 2x$

$$tg\angle D = \frac{CG}{DG} = 3 \to \frac{CG}{3-x} = 3 \to CG = 3(3-x)$$

$BF = CG$

$2x = 9 - 3x$

$5x = 9$

$x = \dfrac{9}{5}$

$BF = CG = \dfrac{18}{5}$

3) $AF = \dfrac{9}{5}$, $AG = 1 + \dfrac{9}{5} = \dfrac{14}{5}$, $DG = 4 - \dfrac{14}{5} = \dfrac{6}{5}$, $DF = 4 - \dfrac{9}{5} = \dfrac{11}{5}$

4) $AC = \sqrt{CG^2 + AG^2} = \sqrt{\dfrac{324}{25} + \dfrac{196}{25}} = \sqrt{\dfrac{520}{25}} = \sqrt{\dfrac{104}{5}}$

5) $\Delta BEC \approx \Delta AED$ (Үшбұрыштар ұқсастығының 1 белгісі)

$$\frac{BC}{AD} = \frac{BE}{ED} = \frac{CE}{AE} = \frac{1}{4}$$

$$BD = BE + ED = BE + 4BE = 5BE \to BE = \frac{1}{5}BD = \frac{1}{5} \times \sqrt{\frac{89}{5}} = \frac{\sqrt{445}}{25}$$

$$AC = CE + AE = CE + 4CE = 5CE \to CE = \frac{1}{5}AC = \frac{1}{5} \times \sqrt{\frac{104}{5}} = \frac{2\sqrt{130}}{25}$$

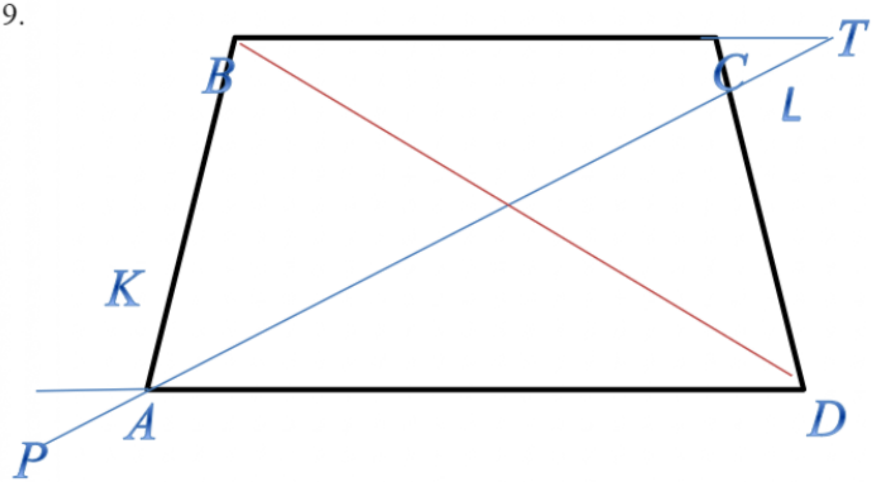
$$\frac{EK}{BM}=\frac{1}{5}\to EK=\frac{1}{5}BH=\frac{1}{5}\times\frac{18}{5}=\frac{18}{25}$$

6) $$2S_{\Delta BEC}=BC\times EK=1\times\frac{18}{25}=\frac{18}{25}$$

$$r=\frac{2S}{p}=\frac{18}{25(1+\frac{2\sqrt{130}}{25}+\frac{\sqrt{445}}{25})}=\frac{18}{25+2\sqrt{130}+\sqrt{445}}$$

Жауабы: $r=\dfrac{18}{25+2\sqrt{130}+\sqrt{445}}$ см.

9.



$ABCD$ трапециясында AD және BC негіздерінің ұзындықтары $2:1$ қатынасындай. AB бүйір қабырғасыннан K нүктесі $AK:BK\equiv1:2$ болатындай етіп, ал CD бүйір қабырғасыннан L нүктесі $CL:LD\equiv1:2$ болатындай етіп алынған. KL кесіндісі BD диагоналын қандай қатынаста бөледі?

Берілгені:

$ABCD$ - трапеция

$AB=2x$

$DC=x$

$CL=y$

$LD = 2y$

$AK = z$

$KB = 2z$

Табу керек:

$$\frac{BO}{OD} = ?$$

Шешуі:

1) $BT \parallel PD$

$\angle OPA = \angle CTO = \alpha$

$\angle PDO = \angle TBO = \beta$

$\Delta OPD \approx \Delta OTB$

$$\frac{BO}{OD} = \frac{BT}{PD}$$

2) Менелай теоремасы(Үш нүктенің бір түзудің бойында жатуын анықтайтын теорема)

$$\frac{DP}{AP} \times \frac{AK}{KB} \times \frac{BO}{OD} = 1$$

$$\frac{DP}{AP} \times \frac{z}{2z} \times \frac{BO}{OD} = 1$$

$$\frac{BO}{OD} = \frac{2AP}{DP}$$

3)

$$\frac{BT}{TC} \times \frac{CL}{LD} \times \frac{DO}{OB} = 1$$

$$\frac{BT}{TC} \times \frac{y}{2y} \times \frac{DO}{OB} = 1$$

$$\frac{DO}{OB} = \frac{2TC}{BT}$$

4)

$$\frac{\dfrac{BO}{OD} = \dfrac{BT}{PD}}{\dfrac{DO}{OB} = \dfrac{2TC}{BT}} \Rightarrow \frac{PD}{BT} \times \frac{BT}{2TC} = 1 \Rightarrow 2TC = PD$$

5)

$$\frac{\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{BT}{PD}}{\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{2AP}{DP}}\Rightarrow 2AP=BT$$

6) $TC=a\Rightarrow 2TC=PD\Rightarrow PD=2a$

$PA=PD-2x=2a-2x$

7) $2AP=BT\Rightarrow BT=x+a$

$2(2a-2x)=x+a$

$4a-4x=x+a$

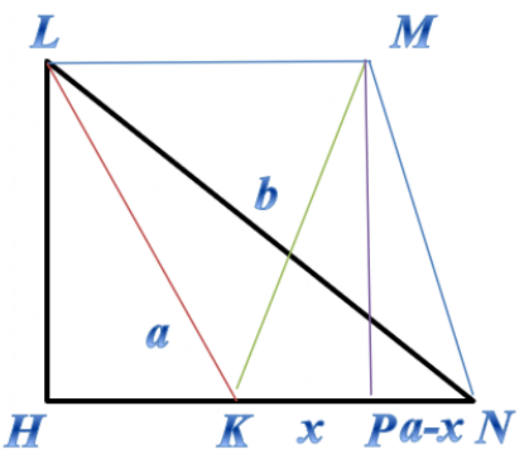
$x=\frac{3a}{5}$

8)

$$\frac{BO}{OD}=\frac{BT}{PD}\Rightarrow\frac{x+a}{2a}=\frac{\frac{3a}{5}+a}{2a}=\frac{\frac{8a}{5}}{2a}=\frac{4}{5}$$

Жауабы: $\frac{BO}{OD}=\frac{4}{5}$

10.



$KLMN$ трапециясында KN негізінің ұзындығы, KM биіктігінің ұзындығы, KL бүйір қабырғасының ұзындығы a-ға тең, ал LN диагоналының ұзындығы b-ға тең. MN бүйір қабырғасының ұзындығын табыңыз.

Берілгені:

$ABCD$ - трапеция

$KL = KN = KM = a$

$LN = b$

$\angle COD = 60^{o}$

Табу керек:

$MN = ?$

Шешуі:

1) $LH^2 = LK^2 - HK^2 = a^2 - x^2 = MP^2$

$LH = \sqrt{a^2 - x^2} = MP$

$$b^2 = 2a^2 = 2ax$$

$$x = \frac{b^2 - 2a^2}{2a}$$

2) $LN^2 = LH^2 + HN^2 = a^2 - x^2$

$b^2 = a^2 - x^2 + (x+a)^2 = a^2 - x^2 + x^2 + 2ax + a^2 = 2a^2 + 2ax$

3) $\Delta LHK \approx \Delta KMP$ $(LK = KM, \angle MLK = \angle PMK, \angle H = MP)$ Үшбұрыштар ұқсастығының 1-белгісі.

$PN = a - x$

$MN^2 = MP^2 + PN^2 = a^2 - x^2 + (a-x)^2 = 2a^2 - 2ax = 2a^2 - b^2 + 2a^2 = 4a^2 - b^2$

$MN = \sqrt{4a^2 - b^2}$

Жауабы: $MN = \sqrt{4a^2 - b^2}$ см.

Қорытынды

Алынған тақырыпты зерделей келе төмендегідей қорытындылар жасауға болады.

1. Трапецияға байланысты күрделі есептерді шешу барысында цифрлық ресурстарды пайдалану білім алушылардың тақырыпты жақсы түсінуіне көмектеседі.
2. Трапецияға іштей және сырттай шеңбер сызу мүмкіндігіне байланысты есептер элементер геометрия мазмұнына жоққа тән.Сондықтан осы мазмұндағы есептерді мектеп геометрия курсына енгізу қажет деп есептейміз.
3. Трапецияға байланысты күрделі есептерді шешудің әр түрлі тәсілдері жайлы білім алушылардың таңдау немесе қолданбалы курстар ұсыну жолдарын іздестіру керек деп ойлаймыз.

Пайдаланған әдебиеттер тізімі

1 Қайыңбаев Ж.Т. Жаттығу, есеп «Математика және Физика журналы» №3, 2017. 2-4 б.
2 Ж.Т. Қайыңбай. Кейбір геометриялық мәселелерді жалпы жағдайдан жеке жағдайға көшіру негізінде қарастыру. СДУ хабаршысы. 2019/4(51). SDUbulletin.
3 Ж.Т. Қайыңбаев, Д. Төлбасы . Менелай теоремасы және оның қолданылуы. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods. 2021/1 (54).
4 Ж.Т. Қайыңбаев, А.С. Ғалымжан. Геометриялық есептерді тригонометриялық мәселелердің көмегімен шешу тәсілдері. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods. 2021/1 (54).
5 Ж.Т. Қайыңбаев, Т.С. Манап. Үшбұрыштың биссектрисасы, медианасы және олардың қасиеттерін пайдаланып күрделі геометриялық есептерді шешу тәсілдері. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods 2021/2 (55).
6 Ж.Т. Қайыңбаев, Қ. Үдербаева. Тең бүйірлі және тік бұрышты үшбұрыштарға іштей және сырттай сызылған шеңберлерге байланысты күрделі есептерді шешу тәсілдері. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods 2021/2 (55).
7 Кулагин Е.Д. и др 3000 конкурсных задач по математике. – М., 2003. – 380 с.
8 Генденштейн Л.Э., Ершова А.П., Ершова А.С. Наглядный справочник по математике с примерами. Для абитурентов, школьников, учителей. – М.: Илекса, 2005, – 192 с.
9 Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи: Пособие для учащихся. – 2-е изд., перераб. И доп. – М.: Просвещение, 1984. – 175 с.
10 Темербекова А.А. Методика преподавания математики: М.: Гуманит. изд.центр ВЛАДОС, 2003. – 176 с.
11 Депман И.Я. Рассказы о математике. Дополненное и исправленное. Для средней школы. Ленинград. Детгиз. 1954.
12 Депман И.Я. За страницами учебника математики. Москва. Издательство «Просвещение», 1989.