

УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ СУЛЕЙМАНА ДЕМИРЕЛЯ

В. В. Вербовский, Н. И. Лобанова

ИНТЕГРИРОВАНИЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Методическая разработка

Каскелен, 2015

УДК 517.91
ББК 22.161.6

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом университета имени Сулеймана Демиреля, протокол №1 от 25 августа 2015 г.

Рецензенты:

Дженалиев М. Т., доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики и математического моделирования КН МОН РК

Багисбаев К. Н., кандидат физико-математических наук, доцент, Университет имени Сулеймана Демиреля

Вербовский В. В., Лобанова Н. И.

Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка: Методическая разработка. — Каскелен, Университет имени Сулеймана Демиреля, 2015. — 34 с. — на русском языке.

Методическая разработка „Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка“ предназначена для студентов-бакалавров по специальностям 5B060100 — „Математика“ и 5B010900 — „Математика“ при изучении раздела „Дифференциальные уравнения первого порядка“ в общем курсе обыкновенных дифференциальных уравнений.

УДК 517.91
ББК 22.161.6

© В. В. Вербовский
© Н. И. Лобанова
© Университет имени Сулеймана Демиреля, 2015

1. УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННОЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, имеет следующий общий вид:

$$y' = f(x, y), \quad (1.1)$$

где функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой плоской области G (область G — это некоторое открытое или замкнутое связное множество на плоскости, при этом множество называется *связным*, если для любых его двух точек существует ломанная, которая соединяет эти две точки и не выходит за рамки данного множества).

Уравнение (1.1) можно записать в виде

$$dy - f(x, y)dx = 0, \quad (1.2)$$

то есть в дифференциальной форме.

Наряду с уравнением (1.1) часто рассматривают уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1.3)$$

где функции $M(x, y)$ и $N(x, y) \in C(G)$ (то есть определены и непрерывны в области G), называемое *уравнением 1-ого порядка в дифференциальной форме или в дифференциалах*. Уравнение (1.3) можно записать в виде уравнения (1.1), то есть разрешенном относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

при условии, что функция $N(x, y)$ не обращается в нуль в области G . Уравнение (1.3) имеет более общий характер, чем уравнение (1.1), потому что в уравнении (1.3) функция $N(x, y)$ может обращаться в нуль. Уравнение (1.3) удобнее и в том отношении, что переменные x и y в нем участвуют равноправно; в геометрических задачах это естественное обстоятельство.

Будем говорить, что дифференциальные уравнения (1.1) или (1.3) разрешимы явно, если их решения выражаются через элементарные функции. Отыскать явные решения дифференциальных уравнений удается редко, в исключительных случаях. Даже простое дифференциальное уравнение $y' = f(x)$ приводит, вообще говоря, к решениям, которые нельзя выразить при помощи элементарных функций. Его решение записывается в виде интеграла

$$y = \int f(x) dx + C$$

или, как говорят, „выражается квадратурой“.

Будем говорить, что решение дифференциального уравнения находится в *квадратурах*, если оно выражается (с помощью явно или неявно заданного соотношения) через элементарные функции и квадратуры от явно заданных функций. Такое решение будем называть *решением в квадратурах*, а само уравнение — *разрешимым в квадратурах*. Описание уравнений, разрешимых в квадратурах, и способы их решений составляют содержание, так называемых, элементарных методов интегрирования.

Остановимся на уравнениях первого порядка, интегрируемых в квадратурах.

1.1. Уравнения с разделенными переменными. Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения вида $y' = f(ax + by + c)$. Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(y)dy = f_2(x)dx \quad (1.4)$$

называется уравнением с *разделенными переменными*. Функции $f_1(y)$ и $f_2(x)$ будем предполагать непрерывными в области

$$G = \{(x, y) : a < x < b; c < y < d\}.$$

Соотношение $\int f_1(y) dy - \int f_2(x) dx = 0$ задает общий интеграл уравнения (1.4) в канонической форме.

Если к уравнению (1.4) добавить условие, что его решение должно удовлетворять начальному условию $y_0 = y(x_0)$, то полученная задача называется *задачей Коши*. Решение задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0) , то есть $y_0 = y(x_0)$, выражается формулой

$$\int_{y_0}^y f_1(y) dy - \int_{x_0}^x f_2(x) dx = 0.$$

Уравнение вида

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)}, \quad (1.5)$$

где функции $g(x)$ и $h(y)$ заданы и непрерывны в области G , причем функция h отлична от нуля при любом $y \in [c, d]$, называется уравнением с *разделяющимися переменными*.

Уравнение с разделяющимися переменными в дифференциальной форме может быть записано в виде:

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)dx = \varphi_2(x)\psi_2(y)dy. \quad (1.6)$$

Уравнение (1.5) можно привести к уравнению вида (1.4) путем умножения его на $h(y)dx$, а уравнение (1.6) приводится к уравнению вида (1.4) путем деления на $\psi_1(y)\varphi_2(x)$.

Заметим, что деление на $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ может привести к потере некоторых решений, обращающих в нуль произведение $\psi_1(y)\varphi_2(x)$.

Рассмотрим уравнение вида:

$$y' = f(ax + by + c). \quad (1.7)$$

Если $b = 0$, то получаем уравнение вида $y' = \xi(x)$, которое интегрируется в квадратурах; если $a = 0$, то $y' = \eta(y)$ — уравнение с разделяющимися переменными; если же и $a \neq 0$, и $b \neq 0$, то замена $z = ax + by + c$, где $z(x)$ — новая функция, приводит уравнение (1.7) к уравнению вида (1.5). Действительно, получаем, что $y = (z - ax - c)/b$, а $y' = (z' - a)/b$. Подставляя это в уравнение (1.7), приходим к уравнению $z' = b \cdot f(z) + a$ — уравнению с разделяющимися переменными.

В качестве примеров приводятся задачи из учебного пособия [1] с соответствующей нумерацией.

Задача 52. Проинтегрировать уравнение $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$.

Решение. Заданное уравнение относится к типу (1.6), то есть является уравнением с разделяющимися переменными.

а) Предположим что $x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $x\sqrt{y^2 + 1}$. Получим $\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2 + 1}}$. Переменные теперь разделены. Тогда

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2 + 1}} + C \quad (\ln x = \sqrt{y^2 + 1} + C)$$

представляет собой общий интеграл в квадратурах.

б) Предположим теперь, что $x = 0$. Очевидно, что это тоже решение нашего уравнения (в данном случае мы рассматриваем x не как переменную, а как искомую функцию $x = x(y)$).

Задача 54. Решить задачу Коши: $y'\operatorname{ctg}x + y = 2$, $y(0) = -1$.

Решение. а) С начала мы разделяем переменные, умножая уравнение на $\frac{dx}{(y-2)\operatorname{ctg}x}$. Получаем уравнение $\frac{dy}{y-2} + \frac{dx}{\operatorname{ctg}x} = 0$. Естественно, мы полагаем при этом, что $y \neq 2$ и $\operatorname{ctg}x \neq 0$. После интегрирования получаем

$$\ln |y - 2| - \ln |\cos x| = \ln \tilde{C},$$

где $\ln \tilde{C} = C$. Потенцируя, получаем общее решение $y = 2 + C_1 \cos x$, причем $C_1 = \pm \tilde{C} \neq 0$. Используя условие $y(0) = -1$, приходим к выводу, что $C_1 = -3$. Значит, $y = 2 - 3 \cos x$ — искомое решение.

б) $y = 2$ — решение, но для него не выполняется начальное условие $y(0) = -1$.

в) условие $\operatorname{ctg}x = 0$ равносильно условию $y = 2$.

Задача 65. Проинтегрировать уравнение $y' = \sqrt{4x + 2y + 1}$.

Решение. Заметим, что это уравнение вида $y' = f(ax + by + c)$, причем a , и $b \neq 0$. Сделаем замену переменных: $z = 4x + 2y + 1$. Тогда $y' = (z' - 4)/2$. После подстановки получаем уравнение с разделяющимися переменными: $z' - 4 = 2\sqrt{z}$, или в дифференциальной форме: $dz = 2(\sqrt{z} + 2)dx$. Разделяя переменные и учитывая, что $\sqrt{z} + 2 \neq 0$ при любом z , получаем уравнение

$$\frac{dz}{2 + \sqrt{z}} = 2dx,$$

которое после интегрирования дает:

$$\sqrt{z} - 2 \ln |2 + \sqrt{z}| = x + c.$$

Значит, $\sqrt{4x + 2y + 1} - 2 \ln |2 + \sqrt{4x + 2y + 1}| = x + C$ — общий интеграл.

Остановимся на некоторых задачах, приводящихся к дифференциальным уравнениям рассмотренных типов.

1.2. Некоторые физические задачи.

Задача 77. Сосуд объемом в 20 л. содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд втекает 0,1 л. азота в секунду, который непрерывно перемешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 99% азота?

Решение. Обозначим количество азота в воздухе в момент времени t через $x(t)$ л. За бесконечно малый промежуток времени Δt , протекающий от момента времени t в сосуд втекает $0,1\Delta t$ л. азота, и вытекает $0,1 \cdot x(t)\Delta t/20$ азота. Если обозначить через Δx увеличение азота в сосуде за время Δt , то получим

$$\Delta x = \left(0,1 - \frac{x(t)}{200}\right) \Delta t. \quad (1.8)$$

Деля уравнение (1.8) на Δt , считая при этом, что функция $x(t)$ является дифференцируемой, после предельного перехода $\Delta t \rightarrow 0$ получаем:

$$\frac{dx}{dt} = 0,1 - \frac{x(t)}{200}. \quad (1.9)$$

Разделяя переменные, находим уравнение

$$\frac{dx}{x - 20} = -\frac{1}{200}dt. \quad (1.10)$$

Общий интеграл уравнения (1.10) записывается в виде:

$$x - 20 = C \cdot \exp(-t/200).$$

Поскольку $x(0) = \frac{20 \text{ л.}}{100\%} \cdot 80\% = 16 \text{ л.}$, постольку $C = -4$, а частный интеграл имеет вид:

$$x - 20 = -4e^{-t/20}. \quad (1.11)$$

Для определения времени T , при котором $x(T) = \frac{20 \text{ л.}}{100\%} \cdot 99\% = 19,8 \text{ л.}$, полагаем в формуле (1.11), что $t = T$, а $x = 19,8$. Имеем, что $-0,2 = 4e^{-T/20}$. Следовательно, $e^{-T/20} = 1/20$. Тогда $T = 200 \ln 20$, что приблизительно равно 600 секундам, или 10 минутам.

Задача 87. *Количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего на него света и толщине слоя. Слой воды толщиной 35 см. поглощает половину падающего на него света. Какую часть света поглотит слой толщиной в 2 м.?*

Решение. Примем за независимое переменное x толщину слоя воды, а за искомую функцию $y(x)$ — количество падающего света на слой толщиной x ; тогда $y(x + \Delta x)$ — количество света, падающего на слой толщиной $x + \Delta x$, где Δx — слой воды малой толщины. Тогда разность $y(x + \Delta x) - y(x) = \Delta y$ составляет количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины.

Используя условие задачи получаем, что $-\Delta y = k \cdot y(x) \Delta x$, где k — коэффициент пропорциональности, а знак „—“, так как $y > 0$, но $\Delta y < 0$. После предельного перехода $\Delta x \rightarrow 0$ получаем уравнение $dy = -ky dx$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Интегрируя полученное уравнение, находим общее решение $y = C \cdot e^{-kx}$.

Для простоты вычисления будем рассматривать слой воды толщиной 35 см., начиная от поверхности воды, хотя вообще, это не уменьшает общности. Можно брать слой произвольной толщины. Выражая C через $y(0)$, имеем $y(0) = C$. Таким образом,

$$y(x) = y(0)e^{-kx}. \quad (1.12)$$

По условию $y(35) = y(0)/2$. Подставляя в (1.12) значение $x = 35$, находим k : $y(0)/2 = y(0)e^{-35k}$, значит $k = \ln 2/35$.

Подставим найденное значение k в уравнение (1.12):

$$y(x) = y(0)e^{-\frac{\ln 2}{35}x} = y(0) \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{x}{35}} = y(0) \cdot 2^{-x/35}.$$

Стало быть, $y(200) = y(0) \cdot 2^{-200/35} = y(0) \cdot 2^{-40/7} \approx 0,02 \cdot y(0)$. Если $y(0) = 100\%$, то $y(200) = 2\%$ — количество света на глубине 2 м.

Таким образом, слой воды толщиной 2 м. поглотит $100\% - 2\% = 98\%$ света.

1.3. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним. Уравнение

$$y' = \varphi(x, y) \quad (1.13)$$

называется *однородным*, если $\varphi(x, y)$ есть *однородная* функция своих аргументов нулевого измерения, то есть имеет место тождество

$$\varphi(tx, ty) = \varphi(x, y).$$

Полагая в последнем тождестве $t = 1/x$, получаем $\varphi(x, y) = \varphi(1, y/x)$, то есть однородное уравнение представимо в виде

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \text{ где } f\left(\frac{y}{x}\right) \equiv \varphi\left(1, \frac{y}{x}\right). \quad (1.14)$$

Уравнение в дифференциалах

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1.15)$$

называется *однородным*, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются *однородными степенями m* , то есть выполняются условия

$$M(tx, ty) = t^m \cdot M(x, y) \text{ и } N(tx, ty) = t^m \cdot N(x, y). \quad (1.16)$$

Уравнение (1.15) приводится к уравнению вида (1.14), если его разрешить относительно y' (при условии, что $N(x, y)$ не обращается в нуль):

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

Действительно, легко заметить, что тогда при замене x на tx и y на ty множитель t^m сокращается.

Однородное уравнение интегрируется при помощи замены $y = z \cdot x$, где $z = z(x)$ — новая искомая функция. Легко вычислить, что $y' = z'x + z$ и $z = y/x$. Подставляя эти выражения в уравнение (1.14) получим уравнение $z'x + z = f(z)$, которое легко преобразовать к уравнению $z'/(f(z) - z) = 1/x$, или $dz/(f(z) - z) = dx/x$.

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad (1.17)$$

преобразуется в однородное путем переноса начала координат в точку пересечения (ξ, η) прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Замена переменных $u = x - \xi$ и $v = y - \eta$ преобразует уравнение (1.17) к виду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{v}{u}}{a_2 + b_2 \frac{v}{u}}\right) \equiv \varphi\left(\frac{u}{v}\right),$$

то есть к виду (1.15).

Если же определитель $\Delta = 0$, то прямая $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и прямая $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ параллельны. В этом случае $a_2/a_1 = b_2/b_1 = k$, и уравнение (1.17) может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) \equiv F(a_1x + b_1y)$$

и, следовательно, замена переменных $z = a_1x + b_1y$ преобразует рассматриваемое уравнение в уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{z' - a_1}{b_1} = F(z), \text{ или } z' = b_1 F(z) + a_1.$$

Уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1.18)$$

называется *обобщенно-однородным*, если найдется такое число K , что данное уравнение становится однородным после замены $y = z^K$. Осуществляя замену, получаем уравнение

$$M(x, z^K)dx + N(x, z^K) \cdot K \cdot z^{K-1}dz = 0. \quad (1.19)$$

Уравнение (1.19) однородное, значит, выполняются условия

$$\begin{aligned} M(tx, t^K z^K) &= t^m \cdot M(x, y), \\ N(tx, t^K z^K) &= t^{m-K+1} \cdot N(x, y). \end{aligned} \quad (1.20)$$

В связи с этими наблюдениями можно дать и другое определение обобщенной однородности. Уравнение (1.18) называется обобщенно-однородным, если найдется такое число K , что если считать x — первого измерения, y — K -ого измерения, а dy — $(K-1)$ -ого измерения, то левая часть уравнения становится однородной функцией m -ого порядка, то есть

$$M(tx, t^K y)dx + N(tx, t^K y)t^{K-1}dy = t^m [M(x, y)dx + N(x, y)dy].$$

Делая замену $y = z^K$, где z — новая искомая функция, а затем замену $z = ux$, где теперь u — новая искомая функция, приводим обобщенно-однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Можно объединить эти две замены в одну: $y = x^K v$, где v — новая искомая функция.

Задача 111. Проинтегрировать уравнение $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$.

Решение. Данное уравнение однородное, потому что функции $y + \sqrt{xy}$ и x являются однородными первой степени. Проверяется это прямой подстановкой tx и ty вместо x и y : $(ty) + \sqrt{(tx)(ty)} = t(y + \sqrt{xy})$ и $(tx) = t(x)$.

В заданном уравнении сделаем замену $y = tx$, где t — новая искомая функция. Тогда $dy = tdx + xdt$. Подставляя в уравнение, получаем

$$(tx + x\sqrt{t})dx = x(tdx + xdt).$$

Случай а) $x \neq 0$. Тогда $\sqrt{t}dx = xdt$, или $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{\sqrt{t}}$ (здесь $t \neq 0$). Интегрируя, получаем $\ln xC = 2\sqrt{t}$, что после возвращения к переменной y дает $x \ln xC = 2\sqrt{xy}$.

Случай б) $x = 0$ — решение.

Случай в) $t = 0$, тогда $y = 0$ — решение, поскольку $y = tx$.

Задача 113. Проинтегрировать уравнение

$$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$$

Решение. Заметим, что данное уравнение относится к типу $y' = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$. Так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

то с помощью замены

$$\begin{cases} 2x - 4y + 6 = u, \\ x + y - 3 = v; \end{cases}$$

оно приводится к однородному. Продифференцируем заданные равенства: $2dx - 4dy = du$ и $dx + dy = dv$. Найдем теперь, что $dx = (du + 4dv)/6$ и $dy = (2dv - du)/6$.

Подставим полученные выражения в заданное уравнение и получим

$$(u - v)du + (4u + 2v)dv = 0.$$

Это уравнение уже однородное, поэтому далее мы сделаем замену $u = tv$, где t — новая искомая функция. Вычислим $du = t dv + v dt$ и подставим сие выражение:

$$v(t - 1)(tdv + vdt) + v(4t + 2)dv = 0.$$

Случай а) $v \neq 0$. Тогда $(t^2 + 3t + 2)dv + v(t - 1)dt = 0$. Если $t^2 + 3t + 2 \neq 0$, то есть $t \neq -1$ и $t \neq -2$, то получим уравнение

$$\frac{dv}{v} + \frac{t - 1}{(t + 1)(t + 2)}dt = 0.$$

Проинтегрируем его и получим выражение:

$$\int \frac{dv}{v} + \int \frac{t - 1}{(t + 1)(t + 2)}dt = C.$$

Следовательно, $v(t+2)^3 = (t+1)^2 \cdot C$, где $C \neq 0$.

Вернемся к старым переменным, принимая во внимание, что

$$t = \frac{u}{v} = \frac{2x - 4y + 6}{x + y - 3}.$$

Получим $(2x - y)^3 = C_1(x - y + 1)^2$, где $C_1 = \frac{9}{8}C \neq 0$.

Случай б) $v = 0$, или $x + y - 3 = 0$ — не является решением. Подставим $x + y - 3 = 0$ в исходное уравнение $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$. Действительно, получим выражение $(2x - 4(3 - x) + 6)dx = 0$, или после упрощения, $(x - 1)dx = 0$, которое не является тождеством.

Случай в) $t = -1$; тогда $u/v = -1$, то есть $2x - 4y + 6 = -x - y + 3$, или, после упрощения, $y = x + 1$ — решение. Проверим это подстановкой в исходное уравнение $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$:

$$(2x - 4(x + 1) + 6)dx + (x + (x + 1) - 3)d(x + 1) = (-2x + 2)dx + (2x - 2)dx = 0.$$

Случай г) $t = -2$; отсюда $y = 2x$ — решение, что также проверяется прямой подстановкой выражения $y = 2x$ в исходное уравнение:

$$(2x - 4(2x) + 6)dx + (x + (2x) - 3)d(2x) = (-6x + 6)dx + (3x - 3)2dx = 0.$$

Заметим, что все решения можно записать в виде $(2x - y)^3 = C_1(x - y + 1)^2$, где $C_1 \in (-\infty, \infty)$, или $y = x + 1$, потому что решение $y = 2x$ содержится в указанном семействе: оно получается, если взять $C_1 = 0$.

Задача 127. Проинтегрировать уравнение $2xy' + y = y^2 \cdot \sqrt{x - x^2y^2}$.

Решение. Заметим, что это уравнение является обобщенно-однородным. Действительно, если заменить x на tx , а y на t^ky (соответственно, y' заменится на $t^{k-1}y'$), то получим, что

$$2txt^{k-1}y' + t^ky = t^{2k}y^2\sqrt{tx - t^2x^2t^{2k}y^2}.$$

Представим данное уравнение в виде $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$:

$$\left(t^ky - t^{2k}y^2\sqrt{tx - t^2x^2t^{2k}y^2}\right)dx + 2txt^{k-1}dy = 0, \text{ или}$$

$$t^k \left(\left(y - t^ky^2\sqrt{tx - x^2t^{2(k+1)}y^2} \right) dx + 2xdy \right) = 0,$$

и вспомним, что по определению обобщенной однородности левая часть вышеприведенного равенства должна равняться

$$t^m \left(\left(y - y^2\sqrt{x - x^2y^2} \right) dx + 2xdy \right)$$

Значит, $t^ky^2\sqrt{tx - x^2t^{2(k+1)}y^2} = y^2\sqrt{x - x^2y^2}$. Приравняем показатели степеней внутри корня и получим, что $2(k+1) = 1$, или $k = -1/2$. Проверим: $t^{-1/2}y^2\sqrt{tx - x^2ty^2} = y^2\sqrt{x - x^2y^2}$ — тождество выполняется.

Сделаем замену $y = tx^{-1/2}$, где $t(x)$ — новая искомая функция. Проведем необходимые расчеты: $y' = t'x^{-1/2} - (1/2)tx^{-3/2}$, подставим результаты в уравнение и получим:

$$2t' = \frac{t^2}{x}\sqrt{1-t^2},$$

или в дифференциальной форме:

$$2dt = \frac{t^2}{x}\sqrt{1-t^2}dx.$$

Случай а) $t \neq 0$ и $t \neq \pm 1$. Умножая на множитель $1/(t^2\sqrt{1-t^2})$, разделяем переменные и получаем уравнение

$$\frac{2}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{1}{x}dx,$$

которое легко интегрируется:

$$2\sqrt{\frac{1}{t^2} - 1} = -\ln xC.$$

Поскольку $t^2 = xy^2$, постольку

$$2\sqrt{\frac{1}{xy^2} - 1} = -\ln xC.$$

Случай б) $t = 0$. Так как $y = tx^{-1/2}$, то получаем $y = 0$, которое является решением: $2x \cdot 0' + 0 = 0^2 \cdot \sqrt{x - x^2 0^2}$.

Случай в) $t = \pm 1$. Так как $y = tx^{-1/2}$, то $y = \pm x^{-1/2}$, или $xy^2 = 1$, которое есть решение: $2x(\pm x^{-1/2})' + (\pm x^{-1/2})^2 = (\pm x^{-1/2})^2 \cdot \sqrt{x - x^2(\pm x^{-1/2})^2}$.

Таким образом, совокупность всех решений есть:

$$2\sqrt{\frac{1}{xy^2} - 1} = -\ln xC, \quad y = 0, \quad xy^2 = 1.$$

1.4. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли, Риккати, Дарбу. Уравнение вида

$$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0, \tag{1.21}$$

где $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ — непрерывные функции, заданные на промежутке (α, β) , причем $a(x) \neq 0$ для $x \in (\alpha, \beta)$, называется *линейным уравнением первого порядка*.

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1.22}$$

называется *каноническим видом линейного уравнения* (1.21). Общее решение уравнения (1.21) всегда выражается в виде квадратуры:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[C + \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx \right]. \quad (1.23)$$

Решение задачи (1.22) с начальным условием $y_0 = y(x_0)$ выражается формулой

$$y = e^{-\int_{x_0}^x p(\tau)d\tau} \cdot \left[y_0 + \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^{\tau} p(s)ds} \cdot q(\tau)d\tau \right], \quad (1.24)$$

или же

$$y = e^{-\int_{x_0}^x p(\tau)d\tau} \cdot y_0 + \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^{\tau} p(s)ds} \cdot q(\tau)d\tau. \quad (1.25)$$

Формула (1.25) получается из формулы (1.24) после раскрытия скобок, замены переменной интегрирования τ на s , внесения $e^{-\int_{x_0}^x p(s)ds}$, как множителя, во второй интеграл, и простого подсчета:

$$e^{-\int_{x_0}^x p(s)ds} \cdot e^{\int_{x_0}^{\tau} p(s)ds} = e^{-\int_{x_0}^x p(s)ds + \int_{x_0}^{\tau} p(s)ds} = e^{\int_{x_0}^{\tau} p(s)ds - \int_{x_0}^x p(s)ds} = e^{\int_{\tau}^x p(s)ds} = e^{\int_{\tau}^x p(s)ds}$$

Уравнение вида

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x) \quad (1.26)$$

называется *уравнением Риккати*, где функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ непрерывны на некотором промежутке.

Уравнение Риккати не интегрируется, вообще говоря, в квадратурах. В общем курсе дифференциальных уравнений выделяется случай, когда удастся найти хотя бы одно частное решение уравнения (1.26) по виду функции $h(x)$.

Пусть y_1 — частное решение уравнения (1.26). Тогда такая замена, как $y = y_1 + (1/u)$, где $u(x)$ — новая искомая функция, приводит уравнение Риккати к линейному уравнению первого порядка. Действительно, тогда $y' = y'_1 - u'/u^2$ подставляем в уравнение Риккати и получаем:

$$y'_1 - u'/u^2 = f(x) \left(y_1 + \frac{1}{u} \right)^2 + g(x) \left(y_1 + \frac{1}{u} \right) + h(x)$$

Поскольку y_1 — частное решение уравнения (1.26), то есть

$$y'_1 = f(x)y_1^2 + g(x)y_1 + h(x),$$

после раскрытия скобок и умножения равенства на u^2 получаем уравнение

$$u' = -(f(x)(2y_1u + 1) + g(x)u) = u(-2f(x)y_1 - g(x)) - f(x),$$

или

$$u' + u(2f(x)y_1 + g(x)) = -f(x).$$

Задача 167. Проинтегрировать уравнение $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$.

Решение. Заметим, что $h(x) = 4/x^2$. Поэтому частное решение будем искать в виде $y_1 = a/x$. Подставляя y_1 в уравнение $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$ получаем тождество

$$-x^2 \frac{a}{x^2} + a + \frac{x^2 a^2}{x^2} = 4,$$

из которого находим, что $a^2 = 4$. Таким образом получаем два значения $a = 2$ и $a = -2$. Следовательно, мы нашли два частных решения уравнения: $y_1 = 2/x$ и $y_2 = -2/x$. После замены $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{u}$ получаем линейное уравнение первого порядка $u' - \frac{5}{x}u = 1$. Интегрируя это уравнение, получаем решение $u = (Cx^5 - x)/4$. Следовательно, после обратной замены, получаем, что $y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}$ — общее решение вышеуказанного уравнения.

Задача 170. Проинтегрировать уравнение $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$.

Решение. Частное решение данного уравнения будем искать в виде линейной функции $y_1 = ax + b$. Подставляя предполагаемое решение в исходное уравнение, получаем тождество

$$a - 2x(ax + b) + (a^2x^2 + 2abx + b^2) = 5 - x^2.$$

Приравнявая коэффициенты при x и x^2 находим, что $a = 1$ и $b = \pm 2$. Возьмем частное решение $y_1 = x + 2$ и сделаем в уравнении замену $y = x + 2 + (1/u)$. В результате получаем уравнение $u' - 4u = 1$, общее решение которого выражается формулой $u = Ct^{4x} + 1$. Делаем обратную замену и получаем общее решение исходного уравнения: $y = x + 2 + 4/(Ce^{4x} - 1)$.

Задача 171. Проинтегрировать уравнение $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$.

Решение. Частное решение будем искать в виде $y_1 = ae^x$. После подстановки его в исходное уравнение получаем тождество

$$ae^x + 2ae^{2x} - a^2e^{2x} = e^{2x} + e^x.$$

Приравнявая коэффициенты при e^x и e^{2x} , получаем, что $a = 1$ и $2 - a^2 = 1$, то есть, что $a = 1$, и, следовательно, $y_1 = e^x$ — частное решение. Сделаем замену $y = e^x + 1/u$ в исходном уравнении и получим уравнение $u' + 1 = 0$. Проинтегрируем последнее уравнение и сделаем обратную замену, после чего получим общее решение исходного уравнения: $y = e^x + 1/(C - x)$.

В уравнении Риккати $y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$ можно сделать и другую замену: $y - y_1 = z$, где z — новая искомая функция, тогда уравнение (1.26) перейдет к уравнению вида:

$$z' + y_1' = f(x)(z + y_1)^2 + g(x)(z + y_1) + h(x),$$

которое после сокращений приобретет вид:

$$z' = f(x)z^2 + (2f(x)y_1 + g(x))z, \text{ или } z' - (2f(x)y_1 + g(x))z = f(x)z^2,$$

которое относится к уравнению Бернулли, о котором ниже и пойдет речь.

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x) \cdot y^n, \quad (1.27)$$

где n — константа, называется *уравнением Бернулли*. При $n = 0$ уравнение Бернулли переходит в линейное уравнение первой степени, а при $n = 1$ оно является уравнением с разделяющимися переменными, так как может быть преобразовано к виду

$$\frac{dy}{dx} + (p(x) - q(x))y = 0, \quad (1.28)$$

и, следовательно, может быть проинтегрировано разделением переменных.

В дальнейшем будем предполагать, что $n \neq 1$.

Уравнение Бернулли заменой $1/y^{n-1} = z$, где $z(x)$ — новая искомая функция, приводится к линейному уравнению

$$\frac{dz}{dx} + (1 - n)p(x)z = (1 - n)q(x). \quad (1.29)$$

Мы уже знаем, как интегрировать уравнение (1.29), поэтому интегрируем его, делаем обратную замену и получаем общее решение уравнения Бернулли.

Для примера найдем общий интеграл уравнения Бернулли $y' - 3y/x = -x^3y^2$. Разделим обе части на y^2 и получим

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{y} = -x^3.$$

Положим теперь, что $1/y = z$. Тогда $-\frac{1}{y^2}y' = z'$, а уравнение после замены приобретает вид $z' + \frac{3}{x}z = x^3$. Интегрирование дает общее решение $z = x^4/7 + C_1/x^3$. Обратная замена приводит к общему решению исходного уравнения

$$\frac{1}{y} = \frac{x^4}{7} + \frac{C_1}{x^3}, \text{ или } y \left(\frac{x^7}{7} + C_1 \right) = x^3.$$

Уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy + P(x, y)[xdy - ydx] = 0, \quad (1.30)$$

в котором функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ однородные степени m , а $P(x, y)$ однородная степени l , причем $l \neq m - 1$, называется *уравнением Дарбу*.

Уравнение Дарбу интегрируется в квадратурах с помощью подстановки $y = zx$, где z — новая искомая функция.

С помощью указанной замены уравнение Дарбу приводится к уравнению Бернулли, если $N(x, y) \neq 0$, и к уравнению с разделяющимися переменными, если $N(x, y) = 0$.

Задача 137. Проинтегрировать уравнение $(2x + 1)y' = 4x + 2y$.

Решение. Так как y и y' входят в уравнение линейно, то это — линейное уравнение. Приведем его к каноническому виду:

$$y' - \frac{2}{2x + 1}y = \frac{4x}{2x + 1}.$$

Общее решение находим по ранее указанным формулам:

$$\begin{aligned} y &= e^{2 \int \frac{dx}{2x+1}} \left[C + \int \frac{4x}{2x+1} e^{-\int \frac{2}{2x+1} dx} \right] = \\ &= (2x + 1) \left[C + \int \frac{4x}{(2x + 1)^2} dx \right] = \\ &= (2x + 1) [C + \ln |2x + 1|] + 1; \text{ итого} \\ y &= (2x + 1) [C + \ln |2x + 1|] + 1 \end{aligned}$$

Задача 147. Проинтегрировать уравнение $(\sin^2 y + x \cdot \operatorname{ctg} y)y' = 1$.

Решение. Относительно $y(x)$ уравнение не является линейным, но в данное уравнение входит линейно x . Поэтому поменяем местами искомую функцию и независимое переменное, то есть будем считать, что $x = x(y)$. Заменяя $y' = 1/x'$, получаем линейное уравнение относительно x :

$$\sin^2 y + x \cdot \operatorname{ctg} y = x'.$$

Приведем это уравнение к каноническому виду: $x' - \operatorname{ctg} y \cdot x = \sin^2 y$. После интегрирования получаем общее решение

$$x = e^{\int \operatorname{ctg} y dy} \left[C + \int \sin^2 y \cdot e^{-\int \operatorname{ctg} y dy} dy \right] = \sin y [C - \cos y].$$

Таким образом, $x = \sin y [C - \cos y]$ — общий интеграл.

Задача 153. Проинтегрировать уравнение $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$.

Решение. Легко понять, что данное уравнение является уравнением Бернулли. Приведем его к каноническому виду:

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \cos x \cdot y^4.$$

Умножим заданное уравнение на $1/y^4$, в результате чего получим

$$\frac{y'}{y^4} - \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{y^3} = \cos x.$$

Сделаем замену $1/y^3 = z$, где z — новая искомая функция. Вычислим производную $z' = -3y'/y^4$ и подставим результат в уравнение:

$$z' + 3\operatorname{tg} x \cdot z = -3\cos x.$$

Проинтегрируем это каноническое уравнение первого порядка:

$$z = e^{-\int 3\operatorname{tg} x dx} \left[C - 3 \int \cos x \cdot e^{3\int \operatorname{tg} x dx} dx \right]$$

В результате получим общее решение $z = C \cdot \cos^3 x - 3 \cos^2 x \cdot \sin x$. Возвращаясь к переменной y , получаем совокупность всех решений исходной задачи: $y^{-3} = C \cdot \cos^3 x - 3 \cos^2 x \cdot \sin x$ или $y = 0$.

1.5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Дифференциальное уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1.31)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$, то есть

$$dU(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy. \quad (1.32)$$

Если уравнение (1.32) является уравнением в полных дифференциалах, то $U(x, y) = C$ — общий интеграл к канонической форме.

Имеет место теорема:

Пусть $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы в области D . Для того, чтобы уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ было уравнением в полных дифференциалах необходимо и достаточно, чтобы в области D выполнялось равенство $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$.

При этом функция $U(x, y)$ находится по одной из формул:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(\xi, y) d\xi + \int_{y_0}^y N(x_0, \eta) d\eta, \quad (1.33)$$

или

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y N(x, \eta) d\eta, \quad (1.34)$$

где (x_0, y_0) — любая точка из области D , такая что $M(x_0, y_0) \neq 0$ или $N(x_0, y_0) \neq 0$.

Возникает естественный вопрос: нельзя ли уравнение (1.31), которое не является уравнением в полных дифференциалах, свести к уравнению в полных дифференциалах путем домножения его на некоторую функцию $\mu(x, y)$. Такая функция $\mu(x, y) \in C^1(D)$, то есть непрерывно дифференцируемая в области D , называется *интегрирующим множителем* для уравнения (1.31), если при умножении на нее уравнение (1.31) становится уравнением в полных дифференциалах.

Такая функция, если она существует, должна удовлетворять соотношению:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

или

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \cdot \mu \quad (1.35)$$

Уравнение в частных производных (1.35) в общем виде не проще, чем задача решения уравнения (1.31). Конечно, достаточно знать только одно его частное решение. Иногда по каким-нибудь особенностям уравнения (1.35) удастся найти его частное решение, и тогда интегрирование уравнения (1.31) сводится к квадратурам.

Справедлива теорема:

Если существует такая функция $\omega \in C^1(D)$, что выполняется соотношение

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M \frac{\partial \omega}{\partial y} - N \frac{\partial \omega}{\partial x}} = \varphi(\omega), \quad (1.36)$$

где φ — некоторая непрерывная функция, то интегрирующий множитель имеет вид $\mu = \mu(\omega(x, y))$ и находится по формуле

$$\mu(\omega) = e^{\int \varphi(\omega) d\omega}. \quad (1.37)$$

Исследователь при нахождении μ задает вид $\omega(x, y)$ и проверяет условие (1.36).

В качестве основных свойств интегрирующего множителя следует указать следующее:

Если $\mu(x, y)$ — интегрирующий множитель для уравнения (1.31), а $U(x, y)$ — соответствующий интеграл, то $\mu(x, y)\varphi(U(x, y))$, где φ — произвольная непрерывная дифференцируемая функция, также является интегрирующим множителем.

Это свойство интегрирующего множителя используется так называемом методе „группировки“ нахождения интегрирующего множителя.

Задача 190. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3} dy = 0.$$

Решение. Проверим, будет ли заданное уравнение в полных дифференциалах. Проведем вычисления: $\partial M/\partial y = -6x^2/y^3$ и $\partial N/\partial x = -6x^2/y^3$. В силу равенства $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, приходит к выводу, что данное уравнение в полных дифференциалах. Возьмем точку $(0, 1) \in D = \{(x, y) : |x| < \infty, y \neq 0\}$.

Тогда общий интеграл имеет вид

$$\int_0^x \frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx - \int_1^y \frac{5}{y^2} dy = C,$$

который после вычисления преобразуется в

$$x^3 + xy^2 + 5y = y^2 \cdot C_1, \text{ где } C_1 = C + 5.$$

Задача 191. Проинтегрировать уравнение

$$2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0.$$

Решение. Так как $\partial M/\partial y = -x/\sqrt{x^2 - y}$ и $\partial N/\partial x = -x/\sqrt{x^2 - y}$, то это уравнение в полных дифференциалах.

Выберем точку $(1, 0) \in D = \{(x, y) : x^2 - y > 0\}$. Получаем, что

$$\int_1^x 2x(1 + x)dx - \int_0^y \sqrt{x^2 - y}dy = C - \text{общий интеграл.}$$

$$\left(x^2 + \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_1^x + \frac{2}{3}\left(x^2 - y\right)^{3/2}\Big|_0^y = C,$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} - \frac{2}{3}x^3 = C_1,$$

$$x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} = C_1.$$

Задача 210. Проинтегрировать уравнение $(x^2 - y^2 + y)dx + x(2y - 1)dy = 0$.

Решение. Имеем, что $\partial M/\partial y = -2y + 1$ и $\partial N/\partial x = 2y - 1$, то это не есть уравнение в полных дифференциалах.

Предполагая, что $\mu = \mu(x)$, найдем

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = -\frac{2}{x},$$

следовательно, существует интегрирующий множитель

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Уравнение

$$\frac{(x^2 - y^2 + y)}{x^2} dx + \frac{x(2y - 1)}{x^2} dy = 0$$

есть уравнение в полных дифференциалах. Возьмем точку $(1, 0) \in D = \{(x, y) : x \neq 0, |y| < \infty\}$, тогда

$$\int_1^x dx - \int_0^y \frac{2y - 1}{x} dy = C \text{ — общий интеграл.}$$

Кроме того, рассмотрим уравнение $1/\mu(x) = 0$, или $x^2 = 0$, то есть $x = 0$ — решение.

2. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной, имеют, вообще говоря, вид

$$F(x, y, y') = 0. \quad (2.1)$$

Не всегда удастся уравнение (2.1) свести к уравнению

$$y' = f(x, y). \quad (2.2)$$

В некоторых случаях путем введения параметра задачу интегрирования дифференциального уравнения (2.1) можно привести к задаче интегрирования уравнения, разрешенного относительно производной.

2.1. Уравнения первого порядка n -ой степени. Левая часть такого уравнения представляет собой целую рациональную функцию относительно y' , то есть имеет вид:

$$(y')^n + p_1 \cdot (y')^{n-1} + p_2 \cdot (y')^{n-2} + \dots + p_{n-1} \cdot y' + p_n = 0, \quad (2.3)$$

где n — положительное целое число, а $p_1, \dots, p_n$ — функции от x и y .

Предположим, что разрешая уравнение (2.3) относительно y' , мы находим конечное число действительных решений

$$y' = f_k(x, y), \text{ где } k = 1, \dots, m, \quad (2.4)$$

где функции $f_k(x, y)$ определены в некоторой области D . Возможны два случая:

а) Во всякой точке области D направления поля, определяемые каждым из уравнений (2.4) различны, так что интегральные кривые различных уравнений (2.4) не могут касаться друг друга внутри области D .

Предположим, что для каждого из уравнений (2.4) задача Коши в области D имеет единственное решение и что каждое из уравнений имеет в области D общий интеграл

$$\Psi_k(x, y) = C, \text{ где } k = 1, \dots, m. \quad (2.5)$$

Тогда совокупность интегралов (2.5) называется общим интегралом уравнения (2.4). Иногда вместо (2.5) пишут равносильное им одно равенство

$$[\Psi_1(x, y) - C] \times [\Psi_2(x, y) - C] \times \dots \times [\Psi_m(x, y) - C] = 0.$$

В этом случае через каждую точку области D проходит m интегральных кривых, то есть столько же, сколько направлений поля определяется в каждой точке с помощью (2.4). Говорят, что в области D имеет место единственность решения задачи Коши.

б) Существует хотя бы одна точка (x_0, y_0) в области D , такая что значения хотя бы двух функций из $f_1(x, y), \dots, f_k(x, y)$ в этой точке совпадают. Интегральные кривые соответствующий уравнений касаются в точке (x_0, y_0) . Вследствие этого интегральными кривыми уравнения (2.3), кроме интегральных кривых (2.5), будут интегральные кривые, полученные путем склейки их в точке (x_0, y_0) , переходя в ней с интегральной кривой одного из этих уравнений на интегральную кривую другого уравнения.

Такая точка (x_0, y_0) называется *особой*.

Решение $y = \varphi(x)$ уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется *особым*, если через каждую его точку кроме этого решения уравнения проходит и другое решение, имеющее в этой точке ту же касательную, что и решение $y = \varphi(x)$, но не совпадающее с ним в сколь угодно малой окрестности этой точки.

Задача 242. Проинтегрировать уравнение, выделить особое решение и дать чертеж интегральных кривых следующего уравнения $8(y')^3 = 27y$.

Решение. Уравнение имеет один действительный корень $y' = (3/2) \cdot \sqrt[3]{y}$. Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и затем интегрируя, находим общий интеграл $y^{2/3} = x + C$. При разделении переменных мы могли потерять решение $y = 0$. Будет ли решение $y = 0$ особым?

Запишем условия касания кривых $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ в точке с абсциссой x :

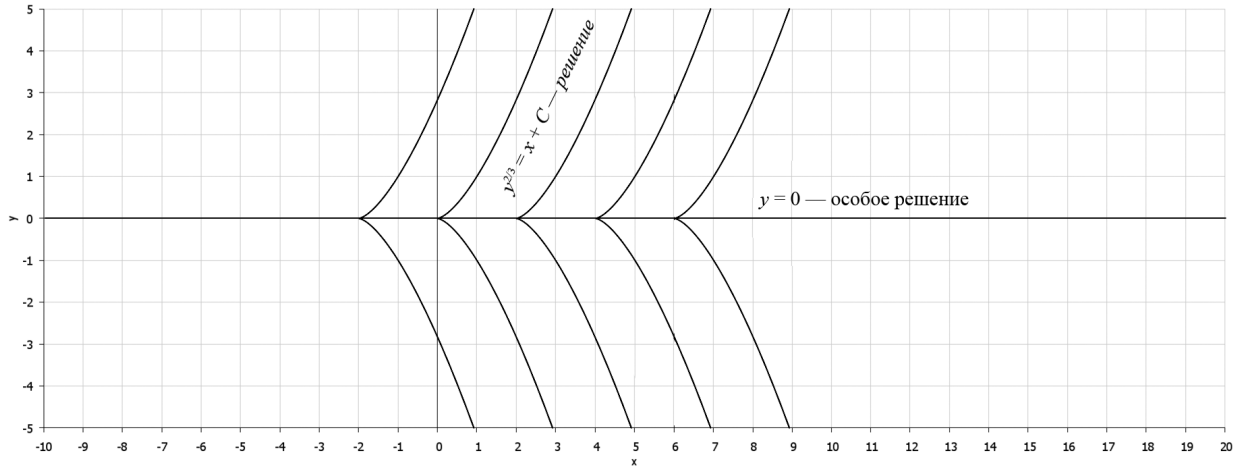
$$y_1(x_0) = y_2(x_0), \quad y'_1(x_0) = y'_2(x_0).$$

В нашем случае в роли $y = y_1(x)$ выступает $y = 0$, а в роли $y = y_2(x) — y^{2/3} = x + C$.

$$0 = (x_0 + C)^{3/2}, \quad 0 = \frac{3}{2}(x_0 + C)^{1/2}.$$

Отсюда легко находим, что точка $x_0 = -C$ удовлетворяет обоим условиям. Следовательно, решение $y = 0$ является особым.

Графически построенные решения интерпретируются следующим образом:



Задача 246. Найти все решения, выделить особые решения (если они есть) и дать чертеж интегральных кривых следующего уравнения $(y')^2 = 4y^3(1 - y)$.

Решение. Разрешая данное уравнение относительно производной, получаем два уравнения:

$$y' = 2y^{3/2}\sqrt{1-y} \text{ и } y' = -2y^{3/2}\sqrt{1-y}$$

Правые части обоих уравнений заданы в области $D = \{(x, y) : y \leq 1, |x| < \infty\}$. Легко видеть, что правые части этих уравнений совпадают в точках прямых $y = 0$ и $y = 1$. Являются ли они особыми решениями?

а) Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{\pm 2y^{3/2}\sqrt{1-y}} = dx, \text{ если } y \neq 0, y \neq 1.$$

Интегрируем и находим семейство $y[1 + (x - C)^x] = 1$, которое является общим интегралом заданного уравнения, или $y = 1/(1 + (x - C)^2)$ — общее решение.

б) $y = 0$ и $y = 1$ — решения заданного уравнения. Проверим, нарушается ли единственность решения задачи Коши в точках исследуемых решений?

Условие касание кривой $y = 1$ с кривыми, входящими в общее решение имеет вид:

$$0 = \frac{1}{1 + (x_0 + C)^2}, \quad x_0 + C = 0.$$

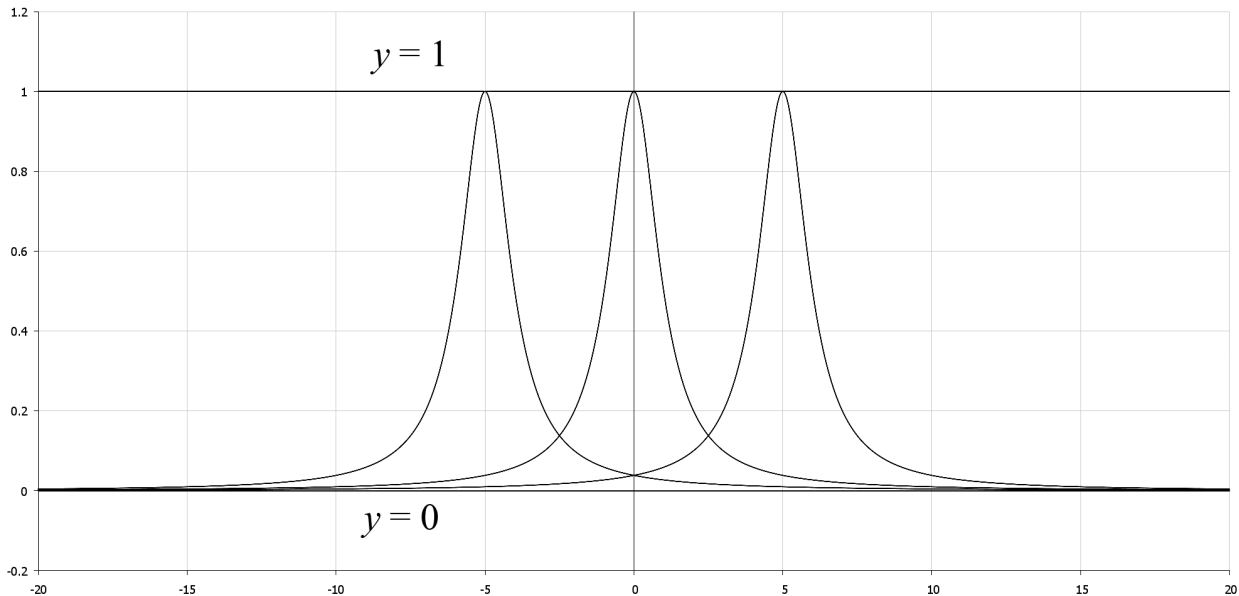
Из второго соотношения получаем, что $x_0 = -C$. Подставляем его в первое соотношение, получаем $0 \neq 1$. Следовательно, $y = 0$ не является особым.

Условия касания кривой $y = 1$ с кривыми, входящими в общее решение, выражается соотношениями:

$$1 = \frac{1}{1 + (x_0 + C)^2}, \quad x_0 + C = 0.$$

Из второго соотношения получаем $x_0 = -C$, которое, после подстановки в первое, дает тождество $1 \equiv 1$. Значит, решение $y = 1$ является особым.

Графически построенные решения изображены на следующем чертеже:



Замечание. Функции $f_k(x, y)$, где $k = 1, \dots, t$, причем $t \leq n$, могут быть рациональными и иррациональными. Дифференциальные

Пример 1. Решить уравнение $(y')^2 + (y^2 - 1)y' - y^2 = 0$.

Решение. Разрешим данное уравнение относительно y' (как обычное квадратное уравнение с неизвестной y'). В результате получим следующее выражение: $y' = \frac{1}{2} ((1 - y)^2 \pm (1 + y^2))$, отсюда $y' = 1$ или $y' = -y^2$.

Правые части этих уравнений $f_1 = 1$ и $f_2 = -y^2$ — рациональные функции. Найдем общее решение этих уравнений: $x + C$ и $y = 1/(x + C)$. Кроме того, $y = 0$ — решение.

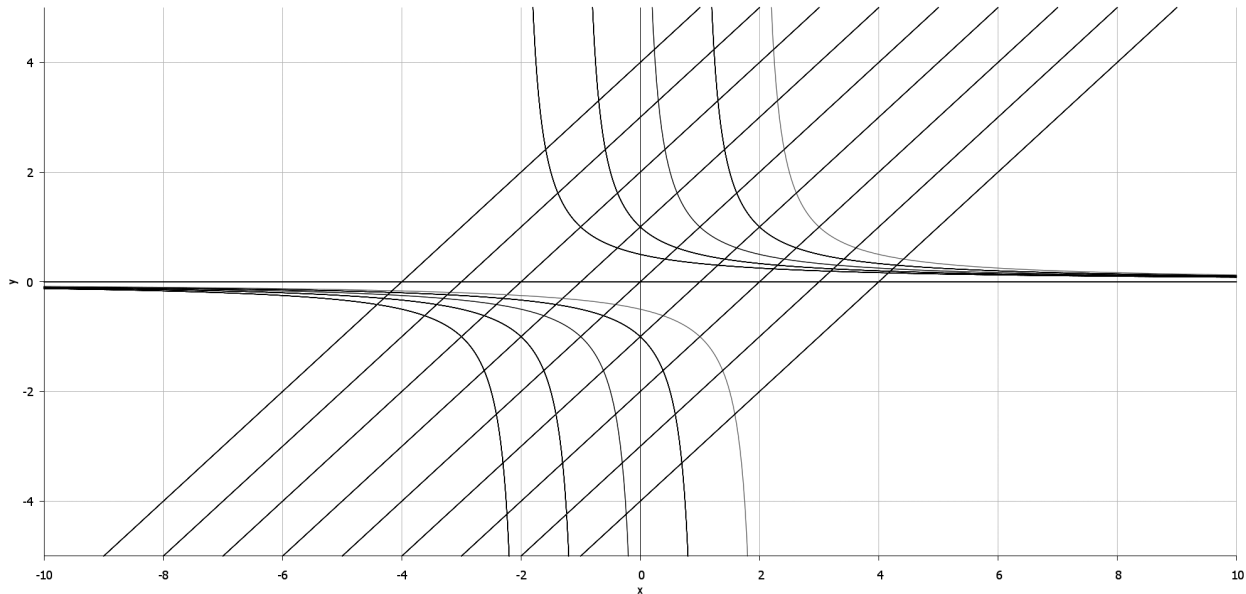
Получили два семейства интегральных кривых, которые не имеют ничего общего между собой: $y = x + C$ — семейство параллельных прямых, а $y = 1/(x + C)$ — семейство парабол.

общий интеграл данного уравнения имеет вид:

$$\left(y - x - C\right) \left(y - \frac{1}{x + C}\right) = 0,$$

то есть общий интеграл — механическое соединение этих двух семейств

Графически построенные решения изображены на следующем чертеже:

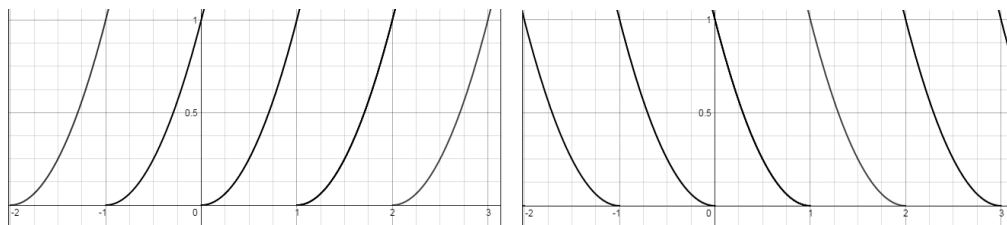


Пример 2. Решить уравнение $(y')^2 - 4y = 0$.

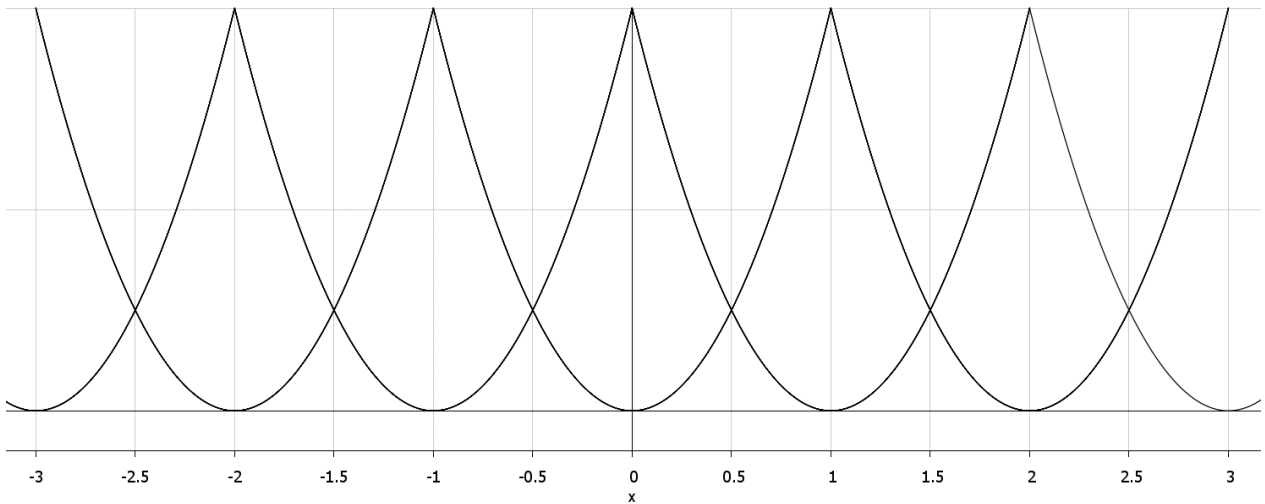
Решение. Разрешив данное уравнение относительно y' , получим два уравнения: $y' = \pm 2\sqrt{y}$, правые части которых $f_1 = 2\sqrt{y}$ и $f_2 = -2\sqrt{y}$ суть иррациональные функции. Тогда $\sqrt{y} = x + C$ ($x \geq -C$), или $y = (x + C)^2$ ($x \geq -C$) есть общее решение первого уравнения, а $-\sqrt{y} = x + C$ ($x \leq -C$) или $y = (x + C)^2$ ($x \leq -C$) есть общее решение второго уравнения.

Кроме этого, $y = 0$ — еще одно решение.

Сделаем чертежи для каждого из этих двух семейств.



Эти два семейства можно объединить в одно семейство парабол:



Задача 253. Проинтегрировать уравнение $x(y')^2 - 2yy' + x = 0$.

Решение. Разрешим это уравнение относительно y' : $y' = (y \pm \sqrt{y^2 - x^2})/x$. Эти уравнения однородные. Сделаем замену $y = tx$, $y' = t'x + tx'$. В результате получим $t + t'x = t \pm \sqrt{t^2 - 1}$, или $t'x = \pm \sqrt{t^2 - 1}$.

Случай а) $t \neq 1$, $x \neq 0$. Тогда

$$\frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \pm \frac{dx}{x}, \quad \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) = \pm \ln x + \ln C.$$

Отдельно рассмотрим эти два уравнения — со знаком „+“ и „–“:

$$t + \sqrt{t^2 - 1} = x \cdot C \text{ и } \left(t - \sqrt{t^2 - 1}\right) \cdot x = C.$$

Покажем, что эти два семейства интегральных кривых можно объединить в одно семейство. Перепишем их в виде:

$$\sqrt{t^2 - 1} = x \cdot C - t \text{ и } \sqrt{t^2 - 1} = \frac{C - tx}{x}.$$

Возведем обе части в квадрат:

$$\begin{aligned} t^2 - 1 &= (x \cdot C - t)^2, \quad (xC - t \geq 0) \text{ и} \\ t^2 - 1 &= \frac{(C - tx)^2}{x^2}, \quad \left(\frac{C - tx}{x} \geq 0\right). \end{aligned}$$

Проведем простые арифметические преобразования и получим:

$$\begin{aligned} 2xCt &= x^2C^2 + 1, \quad (xC - t \geq 0) \text{ и} \\ 2xCt &= C^2 + x^2, \quad \left(\frac{C - tx}{x} \geq 0\right). \end{aligned}$$

В первом соотношении положим, что $C = 1/C_1$. Тогда имеем

$$2txC_1 = C_1^2 + x^2, \quad (xC - t \geq 0).$$

Семейство, определяемое последней формулой, можно объединить с семейством, определяемым второй формулой из первоначального семейства. В итоге получим семейство

$$2txC = x^2 + C^2.$$

Возвращаясь к первоначальному переменному y , получаем общий интеграл данного уравнения:

$$2yC = x^2 + C^2. \quad (2.6)$$

Случай б) $t = \pm 1$, отсюда $y = \pm x$ — решения. Проверим, будут ли эти решения особыми или нет.

Обозначим $y_1(x) = x$, $2y_2C = x^2 + C^2$.

Выпишем условия касания двух кривых $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$:

$$y_1(x_0) = y_2(x_0), \quad y_1'(x_0) = y_2'(x_0) = 1.$$

Имеем в итоге, что $C = x_0$, $C = 2x_0$, то есть $y_1 = x$ пересекается с семейством кривых (2.6) только в начале координат $(0, 0)$. Точка $(0, 0)$ называется тогда *особой точкой*.

Итак, $y_1 = x$ не является особым решением. Аналогично, $y_2 = -x$ пересекается с решением $y_1 = x$ и семейством (2.6) только в точке $(0, 0)$ и также не является особым решением.

Задача 259. Проинтегрировать уравнение $(y')^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$ или, что то же самое, $(y')^2 - 2yy' + y^2(1 - e^x) = 0$.

Решение. Сперва разрешим уравнение относительно y' : $y' = y(1 \pm e^{x/2})$.

Случай а) $y \neq 0$. Разделяем переменные

$$\frac{dy}{y} = (1 \pm e^{x/2})$$

и интегрируем: $\ln Cy = x \pm 2e^{x/2}$ — общий интеграл.

Случай б) $y = 0$ — решение.

Так как $\ln Cy$ определен при $Cy > 0$, то решение $y = 0$ не пересекается ни с одной интегральной кривой из семейства $\ln Cy = x \pm 2e^{x/2}$, то есть $y = 0$ — частное решение.

2.2. Интегрирование уравнений, не разрешенных относительно производной, путем введения параметра. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, y') = 0. \quad (2.7)$$

Предположим, что оно допускает параметрическое представление

$$\begin{aligned}x &= \varphi(u, v), \\y &= \psi(u, v), \\z &= \alpha(u, v),\end{aligned}\tag{2.8}$$

так что $F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \alpha(u, v)) \equiv 0$, при всех значениях параметров u и v . Предполагаем, что функции $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ и $\alpha(u, v)$ дифференцируемы. Используя основное соотношение между дифференциалами и производной вдоль интегральных кривых уравнения первого порядка $dy = y'dx$, находим связь между параметрами u и v .

Действительно, имеем

$$\begin{aligned}dx &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv; & dy &= \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv; \\y' &= \alpha(u, v).\end{aligned}$$

Таким образом, подставляя только что полученные результаты в формулу $dy = y'dx$, получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = \alpha(u, v) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right]\tag{2.9}$$

Уравнение (2.9) является разрешенным относительно производной.

В уравнении (2.9) переменные u и v равноправны. Взяв, например, u за независимую переменную и проинтегрировав уравнение (2.9), получим $v = \omega(u, C)$ — общее решение уравнения (2.9). Тогда $x = \varphi(u, \omega(u, C))$, $y = \psi(u, \omega(u, C))$ общее решение уравнения (2.7) в параметрическом виде.

Практическое применение изложенного метода связано с преодолением двух трудностей: 1) нахождением параметрического представления уравнения (2.7); 2) интегрированием уравнения (2.9).

Первая трудность легко преодолевается, если уравнение (2.7) разрешимо относительно x или y , то есть имеет вид

$$y = \xi(x, y'),\tag{2.10}$$

$$x = \eta(y, y').\tag{2.11}$$

Уравнение (2.10) допускает параметрическое представление

$$x = x, \quad y' = p, \quad y = \xi(x, p),\tag{2.12}$$

а уравнение (2.11) — параметрическое представление

$$y = y, \quad y' = p, \quad x = \eta(y, p).\tag{2.13}$$

Обе трудности преодолеваются при интегрировании уравнений Лагранжа и Клеро.

Уравнение вида

$$y = \varphi(y')x + \psi(y'), \quad (2.14)$$

где $\varphi(y')$ и $\psi(y')$ — непрерывные функции, называется *уравнением Лагранжа*. Если же $\varphi(y') = y'$ — тождественная функция, то уравнение (2.14) называется *уравнением Клеро*.

Докажите, что уравнение Клеро

$$y = y'x + \psi(y'), \quad (2.15)$$

имеет общее решение $y = Cx + \psi(C)$.

Задача 280. Проинтегрировать уравнение $x^2(y')^2 = xy' + 1$.

Решение. Вводим параметр $p = y'$. Из данного уравнения проще найти y , чем x , что мы и сделаем: $y = (x^2p^2 - 1)/(xp)$. Теперь параметризуем уравнение:

$$y' = p, \quad x = x, \quad y = \frac{x^2p^2 - 1}{xp}.$$

Находим связь между параметрами x и p , для чего посчитаем полный дифференциал:

$$dy = \frac{x^2p^2 + 1}{px^2} dx + \frac{x^2p^2 + 1}{p^2x} dp.$$

Заменяя dy на pdx , получаем

$$x^2p^3dx = (x^2p^2 + 1)[pdx + xdp],$$

или $d(xp) + (px)^2x dp = 0$. Пологая $xp = u$ и выражая x через u и p , то есть $x = u/p$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{u^3} + \frac{dp}{p} = 0.$$

Решая последнее уравнение, получаем $\pm u\sqrt{2\ln pC} = 1$. Возвращаясь к старому переменному x , имеем $\pm xp\sqrt{2\ln pC} = 1$.

Тогда общее решение исходного уравнения можно записать в параметрической форме

$$\pm xp\sqrt{2\ln pC} = 1, \quad y = \pm \left[\frac{1}{\sqrt{2\ln pC}} - \sqrt{2\ln pC} \right].$$

Задача 284. Проинтегрировать уравнение $y = xy' - x^2(y')^3$.

Решение. Сделаем параметризацию этого уравнения:

$$x = x, \quad y = xp - x^2p^3,$$

где x и p — параметры.

Найдем связь между параметрами x и p вдоль интегральных кривых. Возьмем полный дифференциал от обеих частей в последнем равенстве. Имеем:

$$dy = (p - 2xp^3)dx + (x - 3x^2p^2)dp.$$

Заменим dy на pdx и получим

$$-2xp^3dx + [x - 3x^2p^2] dp = 0.$$

Это уравнение линейное относительно искомой функции x .

Канонический вид уравнения:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{3x}{2p} = \frac{1}{2p^3} \quad (p \neq 0).$$

Найдем его общее решение: $x = (C\sqrt{|p|} - 1)/p^2$. Тогда общее решение данного уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} xp^2 &= \sqrt{|p|} C - 1, \\ y &= xp - x^2p^3 \quad (p \neq 0). \end{aligned}$$

Пусть $p = 0$, тогда $y = 0$ — решение.

Задача 285. Проинтегрировать уравнение $y = 2xy' + y^2(y')^3$.

Решение. Вводим параметр $p = y'$, разрешаем относительно x и параметризуем уравнение:

$$y' = p, \quad y = y, \quad x = \frac{y - y^2p^3}{2p}.$$

Вычисляем dx из параметрического представления, заменяем его на dy/p и получаем

$$\begin{aligned} \frac{dy}{p} &= \frac{1 - 2yp^3}{2p} dy - \frac{y(1 + 2yp^3)}{2p^2} dp, \\ (1 + 2yp^3)(pdy + ydp) &= 0. \end{aligned}$$

Случай а) $1 + 2yp^3 = 0$. Тогда $x = (y - y^2p^3)/2p$, $1 + 2yp^3 = 0$ — решение в параметрической форме. Исключаем параметр p и получаем решение данного уравнения: $27y^4 = -32x^3$ ($x \leq 0$).

Случай б) $pdy + ydp = 0$. Тогда $d(yr) = 0$ и $yr = C$.

Значит, общее решение исходного уравнения можно записать в параметрической форме:

$$y = \frac{C}{p}, \quad x = \frac{1}{2} \left[\frac{C}{p^2} - C^2 \right],$$

или, после исключения параметра p , получаем общий интеграл заданного уравнения: $2xC = y^2 - x^3$.

2.3. Особые решения. Уравнения Лагранжа и Клеро. Существует два способа нахождения особых решений: а) с помощью C -дискриминантной кривой; б) с помощью P -дискриминантной кривой.

Из курса математического анализа известно, что огибающая входит в состав C -дискриминантной кривой, определяемой системой уравнений

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, C) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} &= 0.\end{aligned}$$

Некоторая ветвь C -дискриминантной кривой будет огибающей, если на ней

а) существуют ограниченные по модулю частные производные

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| \leq N,$$

где M и N — постоянные.

б) $\partial \Phi / \partial x \neq 0$ или $\partial \Phi / \partial y \neq 0$.

Замечание. Условия а) и б) лишь достаточны, а потому ветви C -дискриминантной кривой, на которых нарушено одно из этих условий, тоже могут быть огибающими.

C -дискриминантную кривую иногда удобнее записывать в параметрической форме:

$$x = x(C), \quad y = y(C).$$

Тогда, если: 1) существуют ограниченные производные на ней $|x'_C| \leq M$, $|y'_C| \leq M$; 2) $x'_C \neq 0$ или $y'_C \neq 0$, то $x = x(C)$, $y = y(C)$ — огибающая.

Замечание. C -дискриминантная кривая, помимо огибающей, может содержать в себе еще и геометрическое место точек, являющихся особыми для интегральных кривых (узловые точки, точки соприкосновения, точки заострения или возврата и т.д.). Точки эти определяются условиями

$$F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Замечание. Не следует смешивать особые точки дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ с особыми точками самих интегральных кривых.

Замечание. Геометрическое место точек дифференциального уравнения часто представляет собой решение этого уравнения, которое мы называем особым, но оно может и не быть решением. Геометрическое место особых точек интегральных кривых обычно не является решением, но иногда может и быть решением.

Рассмотрим уравнение $F(x, y, y') = 0$.

P-дискриминантной кривой называется геометрическое место точек, определяемое системой уравнений

$$\begin{aligned} F(x, y, p) &= 0, \\ \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} &= 0. \end{aligned}$$

Если еще на *P*-дискриминантной кривой выполняется такое условие, что $F'_x + F'_y \cdot p = 0$, то *P*-дискриминантная кривая — решение уравнения.

Итак, *P*-дискриминантная кривая будет особым решением уравнения, если:

- 1) она является интегральной кривой;
- 2) выполняются условия касания этой кривой с другими интегральными кривыми.

Задача 297. Найти особое решение дифференциального уравнения, если известно семейство решений этого уравнения: а) $y = Cx^2 - C^2$; б) $Cy = (x - C)^2$.

Решение. а) Находим *C*-дискриминантную кривую. Введем обозначение: $\Phi(x, y, C) = Cx^2 - C^2 - y$. Получаем $\Phi'_C = x^2 - 2C$.

Тогда система, определяющая кривую, имеет вид:

$$\begin{cases} Cx^2 - C^2 - y = 0, \\ x^2 - 2C = 0. \end{cases}$$

Исключаем параметр *C* и получаем $y = x^4/4$ — *C*-дискриминантная кривая. Проверим теперь, будет ли эта кривая огибающей.

Для этого найдем частные производные: $\Phi'_y = -1 \neq 0$, $\Phi'_x = 2Cx = x^3$. Если рассматривать конечный отрезок, то $x \in [a, b]$, $|\Phi_x| \leq M$, $|\Phi'_y| \leq N$, где *a* и *b* — произвольные числа. Значит, условия а) и б) выполняются, то есть $y = x^4/4$ — огибающая, или особое решение.

б) Обозначим $\Phi(x, y, C) = Cy - (x - C)^2$. Тогда $\Phi'_C = y + 2(x - C)$. Значит, система уравнений, определяющая *C*-дискриминантную кривую, имеет вид

$$\begin{cases} Cy - (x - C)^2 = 0, \\ y + 2(x - C) = 0. \end{cases}$$

Исключаем *C* и получаем $y(y + 4x) = 0$. В этом случае *C*-дискриминантная кривая состоит из двух прямых: $y = -4x$ и $y = 0$.

1) Рассмотрим прямую $y = 0$, или в параметрической форме: $y = 0$, $x = C$. Тогда $x'_C = 1 \neq 0$, следовательно, $y = 0$ — огибающая.

2) Аналогично, запишем уравнений прямой $y + 4x = 0$ в параметрической форме: $x = C$, $y = -4C$. Отсюда $x'_C = 1 \neq 0$, $y'_C = -4 \neq 0$, то есть $y = -4x$ — огибающая.

Задача 289. Проинтегрировать уравнение $y = 2xy' - 4(y')^3$.

Решение. Это уравнение Лагранжа, имеющее параметрический вид:

$$y' = p, \quad x = x, \quad y = 2xp - 4p^3.$$

Найдем полный дифференциал последнего равенства и заменим dy на pdx . Имеем: $pdx + [2x - 12p^2]dp = 0$,

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 12p, \quad p \neq 0.$$

Получим линейное уравнение. Его общее решение $x = 3p^2 + Cp^{-2}$ ($p \neq 0$). Тогда общее решение данного уравнения можно записать в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x &= 3p^2 + Cp^{-2}, \\ y &= 2p^3 + 2Cp^{-1}. \end{aligned}$$

Так как $y = 2xp - 4p^3$, то если $p = 0$, получаем, что $y = 0$ — решение.

Задача 291. Проинтегрировать уравнение $(y')^3 = 3(xy' - y)$.

Решение. Это уравнение Клеро. Действительно, $y = xy' - (y')^3/3$. Тогда можно сразу выписать его общее решение, заменив y' на произвольную постоянную C . Получаем $C^3 = 3(xC - y)$.

Известно, что уравнение Клеро всегда обладает особым решением, если $\Psi(y') \neq ay'$, где a — константа, то есть его C -дискриминантная кривая есть огибающая. Составим систему уравнений для нахождения C -дискриминантной кривой:

$$\begin{cases} C^3 = 3(xC - y), \\ C^2 = x. \end{cases}$$

Исключаем C и получаем, что $9y^2 - 4x^3 = 0$ — особое решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Изд-во „Ленанд“. 2015.
- [2] Еругин И. П., Штокало И. З. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во „Наука“. 1973.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной	3
1.1. Уравнения с разделенными переменными. Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения вида $y' = f(ax + by + c)$	4
1.2. Некоторые физические задачи	6
1.3. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним	8
1.4. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли, Риккати, Дарбу	12
1.5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель	17
2. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной	20
2.1. Уравнения первого порядка n -ой степени	20
2.2. Интегрирование уравнений, не разрешенных относительно производной, путем введения параметра	26
2.3. Особые решения. Уравнения Лагранжа и Клеро	30
Список литературы	33

Учебное издание

Вербовский Виктор Валериевич
Лобанова Надежда Игоревна

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Методическая разработка

Технический редактор Н. А. Исмаилов
Компьютерная верстка В. В. Вербовский

Подписано в печать 27.08.2015. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Объем 2,13. Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии университета имени Сулеймана Демиреля

