

УНИВЕРСИТЕТ СУЛЕЙМАН ДЕМИРЕЛЯ

ФАКУЛЬТЕТ ИНЖЕНЕРИИ

КАФЕДРА «МАТЕМАТИКА ЖӘНЕ ЖАРАТЫЛЫСТАНУ
ҒЫЛЫМДАРЫ»

Курсовая работа

Приближение интеграла функции с весом на классе Соболева

6M010900 – Математика

Магистрант: Б. Нурмагамбетов Нурмагамбетов Б.Т

Научный руководитель: _____ Кудайбергенов С.С

Алматы – 2013 ж.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
КРАТКИЙ ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ.....	4

ГЛАВА 1

1 НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УТВЕРЖДЕНИЯ.....	9
1.1 Ортонормированная система. Ряд Фурье.....	9
1.2 Система Чебышева и ряд Фурье-Чебышева.....	10

ГЛАВА 2

ПРИБЛИЖЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ-ЧЕБЫШЕВА

2.1. Вспомогательные утверждения.....	12
2.2 Приближение нулевого коэффициента Фурье-Чебышёва.....	14
2.3 Приближение коэффициента $\hat{f}_{T_c}(n)$	17

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	20
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	21

Введение

Характеристика актуальности работы

Современная вычислительная математика ориентирована на использование компьютеров для прикладных расчетов. Любые математические приложения начинаются с построения модели явления, к которому относится изучаемый вопрос. В различных областях науки и техники, экономики математическими моделями служат функции, производные, интегралы, дифференциальные уравнения.

Компьютер дает возможность запоминать большие (но конечные) массивы чисел и производить над ними арифметические операции и сравнения с большой (но конечной) скоростью по данной вычислителем программе. Поэтому для использования компьютеров для вычислений эти исходные модели надо приближенно заменить такими, которые описываются конечными наборами чисел с указанием конечных последовательностей действий (конечных алгоритмов) для их обработки.

В алгоритмах обработки экспериментальной информации часто возникает необходимость представления в сжатой форме эмпирических зависимостей между параметрами, описывающих поведение сложной системы. Такое сжатие информации в современной математике осуществляется с помощью различных методов приближения функций: интерполирования, аппроксимации, восстановления и др.

Также важную роль играют два фактора, - где разместить измерительные приборы (в каких точках снимать информацию) и как по полученным данным построить аналитическую формулу.

К теоретическим основам вычислительных и информационных технологий можно отнести задачу отыскания наилучшего аппарата приближения данной размерности в данной метрике для данного класса функций.

В 19 веке были изобретены классические методы восстановления функций. Однако эти методы оказались малоэффективными для функций многих переменных. В 1944г. Дж. Фон Нейман предложил новый метод восстановления функций, основанный на переходе от аналитической задачи к соответствующей теоретико-вероятностной задаче. В процессе развития этого метода появился метод Монте-Карло – численный метод, основанный на получении большого числа реализаций случайного процесса, который формируется таким образом, чтобы вероятностные характеристики были равны величинам решаемой задачи.

Мощным стимулом к применению математических методов к практическим задачам, своего рода математической экспансией, послужило появление в середине XX века электронных вычислительных машин (компьютеров), позволяющих в режиме реального времени получать приемлемые решения в виде чисел.

В 1957 году Н.М.Коробов впервые теоретико-числовыми методами построил квадратурную формулу. Преимущество метода Коробова перед

методом Монте-Карло заключается в том, что погрешность не выражается в случайных числах.

После работы Н.М.Коробова началось интенсивное изучение восстановления функций с помощью квадратурных формул. Этой задачей занимались В.И.Темляков, В.А.Быковский, Н.С.Бахвалов, К.К.Фролов, В.В.Дубинин, И.Ф.Шарыгин, С.М. Никольский, С.А.Соболев, С.А.Смоляк, С.Н. Кудрявцев, казахстанские математики И.А.Акбергенов, А.А.Женсыкбаев, Н.Темиргалиев, С.С.Кудайбергенов и др.

В наше время известно несколько способов восстановления функции. Например, восстановление функции по ее значениям в точке, восстановление с помощью тензорного произведения, восстановление с помощью квадратурной формулы, с помощью конечной свертки и др.

Характеристика самостоятельности подхода автора

- Магистранткой самостоятельно проведен литературный обзор общей теории приближения функций и, в частности, приближения коэффициентов Фурье на классах.

Идеи и методы решения поставленной задачи были обсуждены на научно – исследовательском семинаре кафедры «Математические методы и моделирование» ЮКГУ им.М.Ауезова. Получение основного результата диссертации осуществлено совместно с научным руководителем.

Краткий литературный обзор и постановка задачи исследования

Необходимые утверждения для постановки задачи

Через $c(\dots)$ будем обозначать некоторые положительные величины, разные, вообще говоря, в различных формулах, зависящие лишь от указанных в скобках параметров. При положительном A и любом B запись $B \ll_{\alpha, \beta, \dots} A$ будет означать, что $|B| \leq c(\alpha, \beta, \dots)A$.

При положительных A и B запись $A \succsim_{\alpha, \beta, \dots} B$ означает что $A \ll_{\alpha, \beta, \dots} B \ll_{\alpha, \beta, \dots} A$.

Система

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, & T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_m(x) &= 2xT_{m-1}(x) - T_{m-2}(x), & (m &= 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

называется *системой Чебышева*, а коэффициент Фурье-Чебышева интегрируемой с весом

$$\prod_{j=1}^s (1 - x_j^2)^{-1/2}$$

функции $f(x)$ определяется по формуле

$$\hat{f}_{T_c}(m_1, \dots, m_s) = \frac{1}{\pi^s} \int_{[-1,1]^s} f(x_1, \dots, x_s) \prod_{j=1}^s (1 - x_j^2)^{-1/2} T_{m_j}(x_j) dx_1 \dots dx_s$$

(см. [1]).

Сформулируем общую постановку задачи восстановления, которую мы приведем в редакции из [2].

Пусть даны два нормированных пространства X и Y числовых функций, определённых соответственно на множествах Ω и Ω_1 . Пусть $F \subset X$ и Tf есть отображение F в Y .

Для каждого N через $\{(l^{(N)}; \varphi_N)\}$ обозначим множество всевозможных пар $(l^{(N)}; \varphi_N)$, где $l^{(N)} = (l_1, \dots, l_N)$ есть набор функционалов $l_j: F \rightarrow C$ ($j = 1, \dots, N$), $\varphi_N \equiv \varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; y)$ — измеримая функция, действующая из $C^N \times \Omega_1$ в C (C — поле комплексных чисел, $C^N = C \times \dots \times C$).

Положим для $(l^{(N)}; \varphi_N) \in \{(l^{(N)}; \varphi_N)\}$

$$\delta_N((l^{(N)}; \varphi_N), T, F)_Y = \sup_{f \in F} \|Tf - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); y)\|_Y \quad (1)$$

и для некоторого $D_N \subset \{(l^{(N)}; \varphi_N)\}$

$$\delta_N(D_N, T, F)_Y = \inf_{(l^{(N)}; \varphi_N) \in D_N} \delta_N((l^{(N)}; \varphi_N), T, F)_Y \quad (2)$$

Задача восстановления Tf заключается в получении оценок сверху и оценок снизу для величины (2) (желательно совпадающих с точностью для констант) и в указании пары $(l^{(N)}; \varphi_N)$ из D_N , реализующей оценку сверху.

Тем самым, имеем две самостоятельные задачи, одна из которых заключается в получении оценок снизу погрешности восстановления всех вычислительных агрегатов из заданного множества D_N , другая — в нахождении оценок сверху для конкретных вычислительных агрегатов из D_N .

Конкретизируя в (1)-(2) операторы T , множества D_N , пространства X и Y и классы F ($F \subset X$), получаем различные постановки задач.

Примеры функционалов $l(f)$:

1 $l(f) = f(\xi)$ — значения в точке

2 $l(f) = \langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \bar{g}(x) d\mu(x)$ — скалярное произведение, в частности,

коэффициенты Фурье по той или иной ортонормированной системе;

3 $l(f)$ — всевозможные линейные функционалы, определенные на линейной оболочке множества F ;

4 $l(f)$ — какие-то функционалы, не обязательно линейные, но не все.

Примеры операторов Tf :

1 $Tf = \int_{\Omega} f(x) dx$ — интеграл;

2 $Tf = f$ — функция;

3 $Tf = u(y, f)$ - решения уравнений в частных производных

$\Delta u = 0, y = x$ - уравнение Лапласа;

$\Delta u = f, y = x$ - уравнение Пуассона;

$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, y = (t, x)$ - уравнение теплопроводности;

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, y = (t, x)$ - волновое уравнение;

$Lu = 0$, где L - дифференциальный оператор.

Одной из самых распространённых конкретизаций множества D_N является случай, когда в качестве функционалов $l^{(N)} = l^{(N)}(f) = (l_1(f), \dots, l_N(f))$ берутся значения функции f в узлах некоторой сетки $\{\xi_j\}_{j=1}^N$, т.е. $l_j(f) = f(\xi_j) (j = 1, \dots, N)$. В данной работе мы будем рассматривать именно эту конкретизацию D_N и в (2) вместо $\delta_N(D_N, T, F)_Y$ будем писать $\delta_N(T, F)_Y$.

При $X = Y$ и $Tf = f$ задача (1)-(2) есть задача восстановления функций из класса.

$$\delta_N(D_N; F)_Y = \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \sup_{f \in F} \|f(\cdot) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); \cdot)\|_Y \quad (3)$$

Другой её конкретизацией является задача восстановления решений уравнения в частных производных, когда $Tf = u(y, f)$ есть решение уравнения с краевыми и начальными условиями или правой частью $f(x)$.

Случай многих переменных с теоретической точки зрения является сложным, но весьма широко употребляется в практических задачах. Так как нахождение точного порядка выражения (2) является сложной задачей, мы рассматриваем отдельно задачи оценки восстановления сверху и снизу.

1) *Оценка снизу*: для любой функции $\varphi_N \equiv \varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; y)$ и для любого набора функционалов $l^{(N)} = (l_1, \dots, l_N)$ находится число $c_1(F) > 0$, зависящее только от классов функции и функция $f_{\varphi, l^{(N)}} \in F$, такие, что выполняется неравенство

$$\|f_{\varphi, l^{(N)}}(x) - \varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; y)\|_{L^p} \geq c_1(F) \psi_1(N, F)$$

2) *Оценка сверху*: для некоторого числа $c_2(F) > 0$ и для любого $N (N=1, 2, \dots)$ находится функция $\varphi_N \equiv \varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; y)$ и набор функционалов $l^{(N)} = (l_1, \dots, l_N)$, такие, для любой функции $f \in F$ выполняется неравенство

$$\|f_{\varphi, l^{(N)}}(x) - \varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; y)\|_{L^p} \leq c_2(F) \psi_2(N, F)$$

То есть

$$\psi_1(N;F) \ll \delta_N(F) \ll \psi_2(N;F).$$

Если функции ψ_1, ψ_2 точно совпадают, то считается, что на классе F найдено оптимальное решение задачи.

Классы функций определяются заданием тех или иных свойств и ограничений, выделяющих элементы множества, составляющие класс, из общей массы всевозможных функций.

Грубо говоря, задачи анализа состоят в том, чтобы выяснить, как одна группа свойств одних объектов отражается на группе свойств других объектов, каким-то образом связанных с первыми (в теории квадратурных формул – это связь скорости убывания их погрешности с гладкостью подынтегральной функции), а, поскольку, классы функций есть не что иное, как выделения разумных в том или ином смысле свойств функций, то задание классов составляют важнейшую часть постановок задач, стало быть, и содержание математических исследований.

Приведем определения некоторых классов функций.

1 Классом Ульянова $U_s^\Phi(\beta, \theta, \alpha; \psi)$ называется множество функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ – 1-периодических по каждой из s ($s=1,2,\dots$) переменных и таких, что $\|f\| = \max\{|y|; 1\}$:

$$|\hat{f}(m)| \leq \prod_{j=1}^s (\bar{m}_j)^{\beta_j} \theta_j^{\bar{m}^{\alpha_j-1}} \psi_j(m_j), \quad m \in Z^s$$

здесь $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s) \in R^s$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s) \in (0,1)^s$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s), \alpha_j > 0$ ($j = 1, \dots, s$), $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_s)$ ($\psi_j(x)$ – медленно колеблющиеся положительные функции при всех $j = 1, \dots, s$), $\hat{f}(m) = \hat{f}(m_1, m_2, \dots, m_s)$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по ортонормированной системе $\Phi_m(x)$:

2 Изученный класс Коробова $E_s^r \equiv U_s(-\vec{r}, \vec{1}, \vec{1}; \vec{1})$ – есть множество всех 1 – периодических по каждой из переменных функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условию

$$|\hat{f}(m)| \leq (\bar{m})^{-r}$$

где $\bar{m}_j = \max\{1, |m_j|\}$, $\bar{m} = \bar{m}_1 \cdot \dots \cdot \bar{m}_s, r > 1$.

3 Аннотированный класс Коробова $E_s^{r_1, \dots, r_s}(c), E_s^{r_1, \dots, r_s}(1) = E_s^{r_1, \dots, r_s}, r_j > 1$ ($j = 1, \dots, s$) состоит из всех 1 – периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условию

$$|\hat{f}(m)| \leq c \cdot \prod_{j=1}^s \bar{m}_j^{-r_j} \quad (m \in Z^s)$$

4 Классом Соболева-Чебышёва $SW_2^r(-1,1)^s_{T_C}$ называется множество интегрируемых с весом $(1-x_1^2)^{-\frac{1}{2}} \dots (1-x_s^2)^{-\frac{1}{2}}$ функций $f(x_1, \dots, x_s)$, 2-периодических по каждой из s ($s=1,2,\dots$) переменных и таких, что

$$\sum_{m \in Z^s} \left(\hat{f}_{T_C}(m_1, \dots, m_s) \cdot \bar{m}_1^r \dots \bar{m}_s^r \right)^2 < \infty$$

где $\hat{f}_{T_C}(m_1, \dots, m_s)$ - коэффициент Фурье функции $f(x)$ по системе Чебышёва, $\bar{m}_j = \max\{1, |m_j|\}$, $j = 1, \dots, s$.

5 Классом Коробова $E_2^r(D^k f)$, $k = 1, 2, \dots$, $\|D^k f\|_{L_2} \leq 1$, называется множество интегрируемых с весом $(1-x_1^2)^{-\frac{1}{2}} \dots (1-x_s^2)^{-\frac{1}{2}}$ функций $f(x_1, \dots, x_s)$, 2-периодических по каждой из s ($s=1,2,\dots$) переменных и таких, что

$$|c_m(D^k f)| \leq \frac{1}{\bar{m}_1^r \dots \bar{m}_s^r}, m = (m_1, \dots, m_s)$$

где $c_m(f)$ - коэффициент Фурье-Чебышёва функции $f(x)$,

$$\bar{m}_j = \max\{1, |m_j|\}, j = 1, \dots, s,$$

$D = (1-x^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1-y^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ - дифференциальный оператор второго порядка.

Глава 1 Необходимые определения и утверждения

1.1 Ортонормированная система. Ряд Фурье

Определение 1.1 Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций

$$\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x), \dots (1.1)$$

Если для любых натуральных чисел k и m , таких, что $k \neq m$

$$\langle \varphi_k, \varphi_m \rangle = \int_a^b \varphi_k(t) \varphi_m(t) dt = 0,$$

а при $k=m$

$$\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = \int_a^b \varphi_k^2(t) dt = \lambda_k > 0,$$

то последовательность (1.1) называется *ортogonalной системой*.

Определение 1.2 Если норма каждого члена последовательности (1.1) равна единице, то есть для всякого k $\lambda_k = 1$, тогда последовательность (1.1) называется *нормированной системой*.

Определение 1.3 Ортогональная и нормированная система называется *ортонормированной системой*.

Определение 1.4 Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$. Каждому натуральному числу k поставим в соответствие число $c_k(f)$, определяемое по правилу

$$c_k = c_k(f) = \langle f, \varphi_k \rangle = \int_a^b f(t) \varphi_k(t) dt = \|f\| \cos(f, \varphi_k)$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) \varphi_k(x)$, построенный по ортонормированной системе $\{\varphi_k\}$, называется рядом Фурье функции $f(x)$, а числа $c_k(f)$ называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$. Обычно пишут

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) \varphi_k(x).$$

1.2 Система Чебышева и ряд Фурье-Чебышева.

Многочлены Чебышева первого рода (обозначаемые T_n) и второго рода (обозначаемые U_n) определяются посредством следующих формул:

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x \quad (1.2)$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), n = 2, 3, \dots \quad (1.3)$$

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x \quad (1.4)$$

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), n = 2, 3, \dots \quad (1.5)$$

Очевидно, что рекуррентные формулы (1.3) и (1.5) идентичны, а различия между родами многочленов Чебышева являются лишь следствием начальных условий (1.2) и (1.4).

Из формул (1.2)-(1.5) следует, что

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^3 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, \\ U_1(x) &= 2x \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1 \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x \\ U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1 \\ U_5(x) &= 32x^5 - 32x^3 + 6x \\ U_6(x) &= 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

Из этих формул следует, что T_n и U_n являются многочленами n -ой степени с коэффициентом при x^n , равным соответственно 2^{n-1} ($n \geq 1$) и 2^n ($n \geq 1$).

С целью сокращения записи большого числа формул, прежде чем перейти к изучению свойств и применений многочленов Чебышева,

распространим их определение на целые отрицательные значения n . Полагаем, что многочлены Чебышева с такими индексами вычисляются по начальным условиям (1.2) или (1.4) по рекуррентным формулам (1.3) и (1.5), записанным в виде

$$T_{n-2}(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_n(x), n = 1, 0, -1, \dots \quad (1.8)$$

$$U_{n-2}(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_n(x), n = 1, 0, -1, \dots \quad (1.9)$$

Связь многочленов, имеющих отрицательные индексы, с многочленами, имеющими неотрицательные индексы, является очень простой.

Глава 2 Приближение коэффициентов Фурье-Чебышева

2.1. Вспомогательные утверждения

Будем использовать обозначения

$$Z_{v(n)}^s \equiv \{(v_1, \dots, v_s) \in Z^s: v_j \geq v_j(n), j = 1, \dots, s\}, \|v\| = v_1 + \dots + v_s.$$

Лемма 2.1 Пусть даны $n = (n_1, \dots, n_s) \in Z$ и $f(x)$ - 2-периодическая по каждой из s переменных интегрируемая с весом $\sqrt{\frac{1}{1-x_1^2}} \cdot \dots \cdot \sqrt{\frac{1}{1-x_s^2}}$ функция. Положим $g(x_1, \dots, x_s) = f(x_1, \dots, x_s) \cos n_1 \arccos x_1 \cdot \dots \cdot \cos n_s \arccos x_s$. Тогда коэффициенты Фурье-Чебышева функций f и g_n связаны равенством

$$\hat{g}_{T_c}(m_1, \dots, m_s) = \frac{1}{2^s} \sum_{l_1=0}^1 \sum_{l_2=0}^1 \dots \sum_{l_s=0}^1 \hat{f}_{T_c}(n_1 + (-1)^{l_1} m_1, n_2 + (-1)^{l_2} m_2, \dots, n_s + (-1)^{l_s} m_s)$$

Доказательство. Докажем данную лемму в случае $s=2$.

Используем равенство

$$\begin{aligned} \cos n_1 \theta_1 \cdot \cos n_2 \theta_2 \cdot \cos m_1 \theta_1 \cdot \cos m_2 \theta_2 &= \frac{1}{4} (\cos(n_1 + m_1) \theta_1 \cdot \cos(n_2 + m_2) \theta_2 + \\ &+ \cos(n_1 - m_1) \theta_1 \cdot \cos(n_2 + m_2) \theta_2 + \cos(n_1 + m_1) \theta_1 \cdot \cos(n_2 - m_2) \theta_2 + \\ &+ \cos(n_1 - m_1) \theta_1 \cdot \cos(n_2 - m_2) \theta_2) \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \hat{g}_{T_c}(m) &= \int_{[-1,1]^s} g(x_1, x_2) \prod_{j=1}^2 (1-x_j^2)^{-\frac{1}{2}} \cos m_j \arccos x_j dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{[-1,1]^s} f(x_1, x_2) \prod_{j=1}^2 (1-x_j^2)^{-\frac{1}{2}} \cos n_j \arccos x_j \cdot \cos m_j \arccos x_j dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{1}{2^2} \left(\int_{[-1,1]^s} f(x_1, x_2) \cos(n_1 + m_1) \arccos x_1 \cdot \cos(n_2 + m_2) \arccos x_2 \prod_{j=1}^2 (1-x_j^2)^{-\frac{1}{2}} dx_1 dx_2 + \right. \\ &+ \int_{[-1,1]^s} f(x_1, x_2) \cos(n_1 - m_1) \arccos x_1 \cdot \cos(n_2 + m_2) \arccos x_2 \prod_{j=1}^2 (1-x_j^2)^{-\frac{1}{2}} dx_1 dx_2 + \\ &+ \int_{[-1,1]^s} f(x_1, x_2) \cos(n_1 + m_1) \arccos x_1 \cdot \cos(n_2 - m_2) \arccos x_2 \prod_{j=1}^2 (1-x_j^2)^{-\frac{1}{2}} dx_1 dx_2 + \\ &\left. + \int_{[-1,1]^s} f(x_1, x_2) \cos(n_1 - m_1) \arccos x_1 \cdot \cos(n_2 - m_2) \arccos x_2 \prod_{j=1}^2 (1-x_j^2)^{-\frac{1}{2}} dx_1 dx_2 \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^2} (\hat{f}_{T_c}(n_1 + m_1, n_2 + m_2) + \hat{f}_{T_c}(n_1 - m_1, n_2 + m_2) + \hat{f}_{T_c}(n_1 + m_1, n_2 - m_2) + \hat{f}_{T_c}(n_1 - m_1, n_2 - m_2)) = \\
&= \sum_{l_1=0}^1 \sum_{l_2=0}^1 \hat{f}_{T_c}(n_1 + (-1)^{l_1} m_1, n_2 + (-1)^{l_2} m_2)
\end{aligned}$$

Случай переменных доказывается применением метода математической индукции.

Лемма 2.2(см.[9]). При данном $\nu^{(0)} = (\nu_1^{(0)}, \dots, \nu_s^{(0)}) \in Z^s, \nu_j^{(0)} \geq 0 (j = 1, \dots, s)$ имеет место равенство

$$\hat{f}_{T_c}(0) - \Lambda_{\Omega(\nu^{(0)}, q)}(f) = \Delta_{\Omega(\nu^{(0)}, q)}(f)$$

где

$$Z_s^{\nu^{(0)}} \equiv \{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z^s : \nu_j \geq \nu_j^{(0)} (j = 1, \dots, s)\}, 0 \leq \nu_1^{(0)} + \dots + \nu_s^{(0)} < q, \Omega(\nu^{(0)}; q) \equiv \{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu_0}^s : \nu_1 + \dots + \nu_s \leq q\}$$

$$\Lambda_{\Omega(\nu^{(0)}, q)}(f) = \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Omega \subset Z_{\nu_0}^s} \frac{1}{2^{\nu_1 + \dots + \nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^s (k_j - 1) \text{sgn}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} f\left(\cos \frac{2\pi k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \cos \frac{2\pi k_s}{2^{\nu_s}}\right),$$

$$\Delta_{\Omega(\nu^{(0)}, q)}(f) = \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \setminus \Omega(\nu^{(0)}, q)} (-1)^{\sum_{j=1}^s \text{sgn}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} \sum_{(t_1, \dots, t_s) \in Z^s} \hat{f}_{T_c}(2t_1 + \text{sgn}(\nu_1 - \nu_1^{(0)})2^{\nu_1-1}, \dots, (2t_s + \text{sgn}(\nu_s - \nu_s^{(0)})2^{\nu_s-1}))$$

Лемма 2.3 Для данного $n = (n_1, \dots, n_s) \in Z^s$ имеет место равенство

$$\hat{f}_{T_c}(n) - \Lambda_{n,q}(f) = \frac{1}{\pi^s} \int_{[-1,1]^s} f(x_1, \dots, x_s) \prod_{j=1}^s (1 - x_j^2)^{-\frac{1}{2}} \cos n_j \arccos x_j dx_1 \dots dx_s - \Lambda_{n,q}(f) = \Delta_{n,q}(f)$$

где

$$\nu(n) = (\nu_1(n), \dots, \nu_s(n)), \nu_j(n) \in Z, \nu_j(n) \geq 0 (j = 1, \dots, s), \Omega_{\nu(n),q} = \{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu(n)}^s : \nu_1 + \dots + \nu_s < q\}$$

$$\Lambda_{n,q}(f) = \Lambda_{\Omega(\nu(n),q)} \left(f(\cdot) \prod_{j=1}^s \cos n_j, \arccos(\cdot) \right) \quad \text{и}$$

$$\Delta_{n,q}(f) \equiv \Delta_{\Omega(\nu(n),q)} \left(f(\cdot) \prod_{j=1}^s \cos n_j, \arccos(\cdot) \right)$$

2.2 Приближение нулевого коэффициента Фурье-Чебышёва

Пусть заданы натуральные числа N и s , $a = (a_1, \dots, a_N) \in R^N$, $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$, $x^{(n)} \in [-1, 1]^s$ ($n = 1, 2, \dots, N$). Пусть F - некоторый класс непрерывных на множестве $[-1, 1]^s$ функций s переменных.

Положим

$$\delta_N(F; \{x^{(n)}\}_{n=1}^N, a) = \sup_{f \in F} \left| \int_{[-1,1]^s} f(x) dx - \sum_{n=1}^N a_n f(x^{(n)}) \right|,$$

$$\delta_N(F) = \inf_{a, x} \delta_N(F, x, a) \quad (2.8)$$

Здесь интеграл понимается в смысле Римана, а конечная сумма

$$\Lambda(f; x, a) = \sum_{n=1}^N a_n f(x^{(n)})$$

называется квадратурной формулой. Задача заключается в нахождении оценок сверху и снизу для величины (2.8).

Для данного целочисленного вектора $v_0 = (v_1^{(0)}, v_2^{(0)})$ с неотрицательными компонентами определим множество

$$Z_{v_0}^2 = \{(v_1, v_2) \in Z^2: v_j \geq v_j^{(0)}\} \quad (j = 1, 2)$$

где Z^2 - целочисленная решетка 2- мерного евклидова пространства R^2 . И при $v_1^{(0)} + v_2^{(0)} \leq q$ рассмотрим квадратурную формулу

$$\Lambda_{\Omega(\nu^{(0)}, q)}(f) = \sum_{(v_1, v_2) \in \Omega \subset Z_{v_0}^2} \frac{1}{2^{v_1+v_2}} \sum_{k_1=0}^{2^{v_1}-1} \sum_{k_2=0}^{2^{v_2}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^2 (k_j-1) \operatorname{sgn}(v_j - v_j^{(0)})} f\left(\cos \frac{2\pi k_1}{2^{v_1}}, \cos \frac{2\pi k_2}{2^{v_2}}\right),$$

где $\Omega = \Omega_q \equiv \{(v_1, v_2) \in Z_{v_0}^2: v_1 + v_2 \leq q\}$.

Легко вычислить, что количество узлов квадратурной формулы равно $2^q q \sim N$.

Теорема.2.1 Пусть $f \in SW_2^r(D^k f)$, $r > \frac{1}{2}$. Тогда имеет место следующая оценка

$$\begin{aligned} \sup_{f \in SW_2^r(D^k f)} \left| \int_{[-1,1]^2} f(x_1, x_2) \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x_2^2}} dx_1 dx_2 - \Lambda_q(f) \right| &= \sup_{f \in SW_2^r(D^k f)} |c_{00}(f) - \Lambda_q(f)| < \\ &< \frac{(\ln N)^{r+k+\frac{1}{2}}}{2^k N^{r+k}} \end{aligned}$$

Доказательство. По теореме 1.5 для конечного множества Ω_q имеем

$$\begin{aligned} &\left| \int_{[-1,1]^2} f(x_1, x_2) \frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}} \cdot \frac{dx_2}{\sqrt{1-x_2^2}} - \Lambda_q(f) \right| = \\ &= \left| \sum_{(v_1, v_2) \in Z_{v_0}^2 / \Omega} (-1)^{\sum_{j=1}^2 \text{sgn}(v_j - v_j^{(0)})} c_{(2l_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1^{(0)}))2^{v_1-1}, (2l_2 + \text{sgn}(v_2 - v_2^{(0)}))2^{v_2-1}}(f) \right| \leq \\ &\leq \sum_{(v_1, v_2) \in Z_{v_0}^2 / \Omega} \left| c_{(2l_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1^{(0)}))2^{v_1-1}, (2l_2 + \text{sgn}(v_2 - v_2^{(0)}))2^{v_2-1}}(f) \right| \end{aligned}$$

Продолжим оценку, используя определение класса $SW_2^r(-1,1)_{T_c}^s$

Продолжим оценку, используя лемму 1 и определение класса $E_2^r(D^k f)$

2.3 Приближение коэффициента $\hat{f}_{T_c}(n)$

Пусть каждому $n = (n_1, n_2) \in Z^2$ по правилу $v_j(0) = 0$, $2^{\nu_j-2} < |n_j| \leq 2^{\nu_j-1}$, $j = 1, 2$ ставится в соответствие вектор $(v_1(n), v_2(n))$. Для $q > 0$ определим следующее числовое множество:

$$\Omega = \Omega_q = \{n \in Z^2 : v_1(n) + v_2(n) < q\}$$

Используем следующую квадратурную формулу:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\Omega(v(n), q)}(f(\cdot) \prod_{j=1}^2 \cos n_j \arccos(\cdot)) = \\ = \sum_{(v_1, v_2) \in \Omega \subset Z_{v(n)}^2} \frac{1}{2^{\nu_1 + \nu_2}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \sum_{k_2=0}^{2^{\nu_2}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^2 (k_j - 1) \operatorname{sgn}(v_j - v_j(n))} f\left(\cos \frac{2\pi k_1}{2^{\nu_1}}, \cos \frac{2\pi k_2}{2^{\nu_2}}\right) \prod_{j=1}^2 \cos n_j \arccos x_j \end{aligned}$$

Число узлов в этой квадратурной формуле равно $N = N(q) = 2^q \cdot q$. Имеет место следующая теорема:

Теорема 2.3. Пусть $D_s(m_1, \dots, m_s) = (\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_s)^r$, $r > 1$, $\bar{t}_j = \max\{1, |t_j|\}$. Тогда для класса $f \in SW_2^r(-1, 1)_{T_c}^s$, $r > \frac{1}{2}$

справедлива следующая оценка:

$$\sup_{f(x) \in SW_2^r(0, 1)} |\hat{f}_{T_c}(n) - \Lambda_{n, q}(f)| \prec \frac{(q - (v_1(n) + \dots + v_s(n)))^{\frac{s-1}{2}}}{2^{qr}} \prec \frac{(q - \log_2 \bar{m}_1, \dots, \bar{m}_s)^{\frac{s-1}{2}}}{2^{qr}}, \quad (q > v_1(n) + \dots + v_s(n)),$$

здесь $v(n) = (v_1(n), \dots, v_s(n)) \in Z$, $v_j(n) \geq 0$ ($j = 1, \dots, s$), $n = (n_1, \dots, n_s) \in Z^s$

и $v_j(n)$ ($j = 1, \dots, s$) удовлетворяет условию

$$\frac{1}{4} 2^{\nu_j(n)} < |n_j| \leq \frac{1}{2} 2^{\nu_j(n)}$$

Доказательство. На основании леммы 2.3 имеем

$$\begin{aligned}
& \left| \hat{f}_{T_c}(n) - \Lambda_{n,q}(f) \right| = \left| \Lambda_{\Omega(v(n),q)} \left(f(\cdot) \prod_{j=1}^s \cos n_j \arccos(\cdot) \right) \right| = \\
& = \left| \frac{1}{2^s} \sum_{\substack{(v_1, \dots, v_s) \in Z_{v(n)}^s \setminus \Omega(v(n);q)}} (-1)^{\sum_{i=1}^s \text{sgn}(v_i - v_i(n))} \sum_{(l_1, \dots, l_s) \in Z^s} \sum_{l_1=0}^1 \sum_{l_2=0}^1 \dots \sum_{l_s=0}^1 \hat{f}_{T_c}((2t_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1(n))) \cdot 2^{v_1-1} + (-1)^{l_1} n_1, \dots, \right. \\
& \left. \dots, (2t_s + \text{sgn}(v_s - v_s(n))) \cdot 2^{v_s-1} + (-1)^{l_s} n_s) \right| \leq \\
& = \frac{1}{2^s} \sum_{\substack{v_1 + \dots + v_s > q \\ v_j \geq v_j(n)}} \sum_{(l_1, \dots, l_s) \in Z^s} \sum_{l_1=0}^1 \sum_{l_2=0}^1 \dots \sum_{l_s=0}^1 \left| \hat{f}_{T_c}((2t_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1(n))) \cdot 2^{v_1-1} + (-1)^{l_1} n_1, \dots, (2t_s + \text{sgn}(v_s - v_s(n))) \cdot 2^{v_s-1} + \right. \\
& \left. + (-1)^{l_s} n_s) \right| \cdot \frac{((2t_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1(n))) \cdot 2^{v_1-1} + (-1)^{l_1} n_1)^r \dots ((2t_s + \text{sgn}(v_s - v_s(n))) \cdot 2^{v_s-1} + (-1)^{l_s} n_s)^r}{((2t_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1(n))) \cdot 2^{v_1-1} + (-1)^{l_1} n_1)^r \dots ((2t_s + \text{sgn}(v_s - v_s(n))) \cdot 2^{v_s-1} + (-1)^{l_s} n_s)^r}
\end{aligned}$$

Так как функция $f(x)$ принадлежит классу $SW_2^r(0,1)_{T_c}^s$, то, применив неравенство Гельдера, получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2^s} \sum_{\substack{v_1 + \dots + v_s > q \\ v_j \geq v_j(n)}} \sum_{(l_1, \dots, l_s) \in Z^s} \sum_{l_1=0}^1 \sum_{l_2=0}^1 \dots \sum_{l_s=0}^1 \left| \hat{f}_{T_c}((2t_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1(n))) \cdot 2^{v_1-1} + (-1)^{l_1} n_1, \dots, (2t_s + \text{sgn}(v_s - v_s(n))) \cdot 2^{v_s-1} + \right. \\
& \left. + (-1)^{l_s} n_s) \right| \cdot \frac{((2t_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1(n))) \cdot 2^{v_1-1} + (-1)^{l_1} n_1)^r \dots ((2t_s + \text{sgn}(v_s - v_s(n))) \cdot 2^{v_s-1} + (-1)^{l_s} n_s)^r}{((2t_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1(n))) \cdot 2^{v_1-1} + (-1)^{l_1} n_1)^r \dots ((2t_s + \text{sgn}(v_s - v_s(n))) \cdot 2^{v_s-1} + (-1)^{l_s} n_s)^r} \leq \\
& \leq \frac{1}{2^s} \left(\sum_{\substack{v_1 + \dots + v_s > q \\ v_j \geq v_j(n)}} \sum_{(l_1, \dots, l_s) \in Z^s} \sum_{l_1=0}^1 \sum_{l_2=0}^1 \dots \sum_{l_s=0}^1 \left(\hat{f}_{T_c}((2t_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1(n))) \cdot 2^{v_1-1} + (-1)^{l_1} n_1, \dots, (2t_s + \text{sgn}(v_s - v_s(n))) \cdot 2^{v_s-1} + \right. \right. \\
& \left. \left. + (-1)^{l_s} n_s) \right) \left((2t_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1(n))) \cdot 2^{v_1-1} + (-1)^{l_1} n_1 \right)^r \dots \left((2t_s + \text{sgn}(v_s - v_s(n))) \cdot 2^{v_s-1} + (-1)^{l_s} n_s \right)^r \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
& \times \left(\sum_{\substack{v_1 + \dots + v_s > q \\ v_j \geq v_j(n)}} \sum_{(l_1, \dots, l_s) \in Z^s} \sum_{l_1=0}^1 \sum_{l_2=0}^1 \dots \sum_{l_s=0}^1 \frac{1}{\left((2t_1 + \text{sgn}(v_1 - v_1(n))) \cdot 2^{v_1-1} + (-1)^{l_1} n_1 \right)^{2r} \dots \left((2t_s + \text{sgn}(v_s - v_s(n))) \cdot 2^{v_s-1} + (-1)^{l_s} n_s \right)^{2r}} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Учитывая определение класса $SW_2^r(-1,1)_{T_c}^s$, на основании леммы 2.6 можно записать

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2^s} \cdot \sqrt{2^s} \cdot \|f\|_{SW_2^r} \left(\sum_{\substack{v_1 + \dots + v_s > q \\ v_j \geq v_j(n)}} \sum_{(l_1, \dots, l_s) \in Z^s} \sum_{l_1=0}^1 \sum_{l_2=0}^1 \dots \sum_{l_s=0}^1 \frac{1}{(\bar{t}_1 \cdot 2^{v_1} \dots \bar{t}_s \cdot 2^{v_s})^{2r}} \right)^{\frac{1}{2}} = \\
& = \frac{1}{2^s} \cdot \sqrt{2^s} \cdot \|f\|_{SW_2^r} \sqrt{2^s} \cdot \left(\sum_{\substack{v_1 + \dots + v_s > q \\ v_j \geq v_j(n)}} \sum_{(l_1, \dots, l_s) \in Z^s} \frac{1}{(\bar{t}_1 \cdot 2^{v_1} \dots \bar{t}_s \cdot 2^{v_s})^{2r}} \right)^{\frac{1}{2}} \ll
\end{aligned}$$

$$<< \left[\sum_{\substack{v_1+\dots+v_s > q \\ v_j \geq v_j(n)}} \frac{1}{2^{2(v_1+\dots+v_s)r}} \right]^{\frac{1}{2}} \asymp \left[\sum_{l=q+1}^{\infty} \sum_{\substack{v_1+\dots+v_s=l \\ v_j \geq v_j(n)}} \frac{1}{2^{2(v_1+\dots+v_s)r}} \right]^{\frac{1}{2}} \asymp \left[\sum_{l=q+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2lr}} \sum_{\substack{v_1+\dots+v_s=l \\ v_j \geq v_j(n)}} 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

применив лемму 2.8, получим

$$\left[\sum_{l=q+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2lr}} \sum_{\substack{v_1+\dots+v_s=l \\ v_j \geq v_j(n)}} 1 \right]^{\frac{1}{2}} \asymp \sum_{l=q+1}^{\infty} \frac{(l - (v_1(n) + \dots + v_s(n)))^{\frac{s-1}{2}}}{2^{lr}}.$$

Из леммы 2.9 следует, что

$$\sum_{l=q+1}^{\infty} \frac{(l - (v_1(n) + \dots + v_s(n)))^{\frac{s-1}{2}}}{2^{lr}} \asymp \frac{(q - (v_1(n) + \dots + v_s(n)))^{\frac{s-1}{2}}}{2^{qr}}.$$

Таким образом,

$$\sup_{f(x) \in SW'_1(-1,1)_{\mathbb{R}}} \left| \hat{f}(n) - \Lambda_{n,q}(f) \right| \asymp \frac{(q - (v_1(n) + \dots + v_s(n)))^{\frac{s-1}{2}}}{2^{qr}} \asymp \frac{(q - \log_2 \bar{n}_1, \dots, \bar{n}_s)^{\frac{s-1}{2}}}{2^{qr}}.$$

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ точки зрения автора магистерской диссертации

При выводе основного результата работы автор воспользовался методами приближения интеграла, что указывает на правильность его точки зрения.

Анализ умения магистранта пользоваться методами научного исследования

Получена оценка погрешности приближенного вычисления коэффициентов Фурье-Чебышёва для функций из класса Коробова. Приближение осуществляется с помощью квадратурной формулы Смоляка. Суть рассматриваемой задачи заключается в оценке погрешности оператора приближения в степенной шкале.

Анализ новизны и практической значимости работы

Диссертация посвящена задаче приближения коэффициентов Фурье функций из классов с отсутствующим либо слишком сложным аналитическим описанием.

В диссертации конечная числовая информация снимается посредством линейного функционала – значений функций в точках.

В этих конкретных условиях получены следующие результаты, представляемые как основные:

- найдены точные в степенной шкале оценки погрешности приближения коэффициентов Фурье-Чебышёва функций из класса Коробова $E_2^r(D^k f)$ по системе Чебышёва с помощью оператора приближения, построенного по квадратурной формуле Смоляка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983.
2. Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразование рядов Фурье // Вестник Евразийского университета. 1997. №3. С.90-144.
3. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. – М.: Физматгиз, 1963.
4. Рябенский В.С. О таблицах и интерполяции функций из некоторого класса // Докл. АН СССР. – 1960. Т.131. - №5. – С.1025-1027.
5. Темиргалиев Н. О приближенном восстановлении функций по значениям в узлах «алгебраической» сетки // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ.-мат. – 1989. - №3. – С.49-51.
6. Hua Loo Keng, Wang Yuan. Application of Number Theory of Numerical Analysis. Berlin; Heidelberg; New York: Springer Verlag, 1981.
7. Темляков В.Н. О приближенном восстановлении периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР. – 1985. – Т.280. - №6. – С.1310-1313.
8. Темляков В.Н. Квадратурные формулы и восстановление по значениям в узлах теоретико-числовых сеток для классов функций малой гладкости // Успехи матем.наук. – 1985. – Т.40. - №4. – С.203-204.
9. Темляков В.Н. О восстановлении периодических функций нескольких переменных по значениям в узлах теоретико-числовых сеток // Analysismath. – 1986. – Т.12. – С.287-305.
10. Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к приближенному восстановлению и интегрированию периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР. – 1990. – Т.310. - №5. – С.1050-1054.
11. Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИАН СССР. – 1986. – Т.178. – С.1-112.
12. Смоляк С.А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл.АН СССР.1963.Т.148,№5.С.1042-1045.
13. Смоляк С.А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них // Дис. канд. физ.-мат.наук. М., 1965.
14. Н.Темиргалиев, С.С. Кудайбергенов, А.А. Шоманова. Применение тензорных произведений функционалов в задачах численного интегрирования // Изв. РАН, сер. матем, 73:2 (2009), 183 – 224.

15. Темиргалиев Н. Тензорные произведения функционалов и их применения. // Докл. РАН. 2010.
16. Темиргалиев Н. Тензорные произведения функционалов и их применения к задачам восстановления // Вестник Евразийского нац. универ., 2003, №4, С.67-73.
17. Н. Темиргалиев, С.С.Кудайбергенов, А.А. Шоманова. Применения квадратурных формул Смоляка к численному интегрированию коэффициентов Фурье и в задачах восстановления // ИзвВУЗов. Математика. 2010. №3. С.52-71.
18. Beerends R.J. Chebyshev polynomials in several variables and the radial part of the Laplace-Beltrami operator // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. V. 328. № 2. P. 1951-1961.
19. В.А. Абилов, М.К. Керимов. об оценках остаточных членов кратных рядов Фурье-Чебышева и кубатурных формул чебышёвского типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т.43. – № 5. – С.643 – 663.
20. С.С.Кудайбергенов, Д.Исаходжаев. «Оценка погрешности квадратурной формулы на классе $U_s^{r_c}(-\bar{r}, \bar{1}, \bar{1}, \log_2^{-r}(\cdot))$ Ульянова-Чебышева.
21. С.С.Кудайбергенов, Э.Джаулыбаева, С.Г.Сабитова «Оценка погрешности квадратурной формулы на классе $U_s^{r_c}(-\bar{r}, \bar{1}, \bar{1}, \log_2^{-r}(\cdot))$ ($r > 1, \tau < 1$) Ульянова-Чебышева. Журнал «Поиск» № 3 (2010г.), серия Математика.
22. Воронин С.М. О построении квадратурных формул // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т.59, №4. С.3-8
23. Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. О приближенном вычислении интегралов для функций из пространства $W_p^\alpha[0,1]^n$ // Успехи матем. наук, 2000. Т.55, №6. С. 153-154
24. Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. Квадратурные формулы для классов функций малой гладкости // Матем. сб. 2003. Т.194, №10. С. 133-160.