МРНТИ 27.03, 14.25

Н.Қ. Құттығұл[1]*, Д.Б. Кабылкаев*[1]*, Ш.Е. Оразбақ*[1]
[1]Университет имени Сулеймана Демиреля
г. Алматы, Казахстан

ВВЕДЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В ШКОЛАХ С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ

Аннотация. Необходимость внедрения в школьное обучение элементов современной математики сегодня не вызывает сомнений, поскольку большинство современных знаний базируются на математике. В данной статье мы рассматривает перспективы введения в школьное преподавание элементов алгебры логики. Понятно, что на первый план выдвигается математическая логика как ввиду той фундаментальной роли, которую логические высказывания играют в современной математике, так и ввиду относительной простоты этого понятия. Математическая логика, несмотря на простоту ее основных положений, обладает математической глубиной. Сфера ее применения огромна, поскольку компьютерные науки базируются на математической логике. Математическая логика развивает особый тип мышления, вот почему она как нельзя лучше подходит для того, чтобы показать школьникам образец современной математики.

Ключевые слова: логика, методика преподавания математики, углубленное изучение математики.

***

Аңдатпа. Бүгінгі күні қазіргі заманғы математика элементтерін мектептегі білім беру саласына енгізу қажеттілігі - сөзсіз. Өйткені еңзаманауи білімнің басым бөлігі математикаға негізделген. Осы мақалада біз логика алгебрасының элементтерін мектепте оқыту саласына енгізу келешегін қарастырғанбыз. Бұл жерде бірінші кезекке, әрине, математикалық логика шығады. Алдымен логикалық есептіліктердің математикалық логика саласында атқаратын негізгі рөлін ескерген болсақ, екіншіден тұжырымдамаларының салыстырмалық қарапайым - дылығын ескермей қоймадық. Математикалық логика, оның негізгі ережелерін қарапайымдылығы қарамастан, математикалық тереңдігі бар. Математикалық логиканың қолдану саласы өте ауқымды, себебі компьютерлік ғылымдар оған құраладады. Логиканың бұл түрі ерекше ойлау түріндамытқандықтан, ол мектеп оқушыларына қазіргі заманғы математика үлгісін көрсету үшін өте қолайлы болары анық.

Кілт сөздер: логика, математика оқыту әдістемесі.

***

Abstract. Need of introduction in school training of elements of modern mathematics doesn't raise today doubts as the majority of modern knowledge are based on mathematics. In this article we considers the prospects of introduction to school teaching elements of algebra of logic. It is clear, that the mathematical logic as in view of that fundamental role which logical statements play in modern mathematics, and in view of relative simplicity of this concept is put in the forefront. The mathematical logic, despite simplicity of her basic provisions, has mathematical depth. The sphere of its application is huge as computer sciences are based on mathematical logic. The mathematical logic develops special type of thinking, that is why it as well as possible approaches to show to school students a sample of modern mathematics.

Key words: logic, methodic of teaching mathematics, teaching advanced mathematics.

Как известно, логика (греческое logos, λόγος — слово, мысль, речь, разум) - совокупность наук о законах и формах мышления. Как грамматика изучает формы отдельного слова и формы сочетания слов в предложении, отвлекаясь от конкретного содержания языковых выражений; как математика рассматривает количественные и пространственные отношения и формы, отвлекаясь от конкретных материальных предметов, так и формальная логика исследует формы отдельных мыслей и формы сочетаний их в отвлечении от конкретного содержания суждений, умозаключений, доказательств и понятий. Составной частью формальной логики является математическая логика. Как хорошо известно, зародилась логика в лоне античной философии, которая была тогда единой нерасчлененной наукой — объединяла всю совокупность знаний о мире и о самом человеке и его мышлении. В IV в. до н. э. под влиянием возросшего интереса к ораторскому искусству начинает развиваться логика. Это характерно не только для Древней Греции, но и для Древней Индии, Древнего Китая, Древнего Рима и феодальной России. Всвоем первом сочинении по логике Аристотель (384 — 322 до н. э.) рассматривал ее проблемы в связи с теорией ораторского искусства. Первый русский фундаментальный труд по логике, написанный М.В. Ломоносовым (1711 — 1765), называется «Краткое руководство к красноречию». Основы математической логики заложил немецкий ученый и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 — 1716). Он сделал попытку построить первые логические исчисления, считал, что можно заменить простые рассуждения действиями со знаками и привел соответствующие правила. Но Лейбниц высказал только идею, а развил ее окончательно англичанин Джордж Буль (1815 — 1864), который и считается основоположником математической логики как самостоятельной дисциплины. В его работах логика обрела свой алфавит, свою орфографию и грамматику. Недаром начальный раздел математической логики называют алгеброй логики, или булевой алгеброй. Алгебра логики (логика высказываний) — один из основных разделов математической логики, в котором методы алгебры используются в логических преобразованиях высказываний [1,3].

В настоящее время очень часто приходится обсуждать вопрос: нужно ли вообще изучать элементы современной математики в курсе средней школы. Мы считаем, что не только нужно, но и совершенно необходимо в силу огромной практической и познавательной значимости элементов современной математики.

Знакомство школьников с современной математикой целесообразно начать с изучения элементов математической логики, так какэлементы логики являются компонентом усиливающим прикладное и практическое значение школьного образования.

При этом имеет смысл не просто ознакомление школьников с некоторыми любопытными вопросами математической логики, а систематическая и планомерная работа с понятием логически истинного предложения, которое является центральным логическим понятием, представляя логику в рассуждениях и доказательствах.Мы считаем, что математическая логика как нельзя лучше подходит для того, чтобы показать школьникам образец современной математической теории — ее начала достаточно просты, но тем не менее, очень важны для понимания современной математики.

Внедрение элементов математической логики уместно вводить на факультативных занятиях.

Различают два вида факультативных занятий по математике:

- изучение дополнительных глав и вопросов математики, цель которого состоит в расширении и углублении знаний учащихся по обязательной для всех программе, ознакомление с разделами, примыкающими к программным или раскрывающими приложениями математики;
- небольшие специальные курсы, знакомящие учащихся (в основном старших классов) с некоторыми областями современной математике.

Содержание и методика проведения факультативных занятий должны привлекать учащихся. Для этого необходимо включить в программу факультативов темы, имеющие большое общеобразовательное и прикладное значение. Изучение таких тем позволяет существенно повысить уровень математического развития учащихся, что и является главной задачей математических факультативов.

Факультативные занятия представляют собой одно из проявлений достаточно новой формы обучения математике - дифференцированного обучения. По существу факультативные занятия являются наиболее динамичной разновидностью дифференциации обучения.

В качестве экспериментальной работы мы предлагаем изучение элементов современной алгебры логики в рамках факультативного курса по математике.

Нами была разработана программа факультативного курса «Элементы алгебры логики». Мы ставили перед собой цель показать, как можно ввести понятие “логическая истина” в жизнь обычного школьника.

Перед Вами изложение теоретического материала для учащихся (текст выдаётся каждому школьнику, который добровольно пришёл на факультативное занятие). Как правило, длительность занятия от 45 минут (1 занятие) до 225 (5 занятий). Темы и время проведения факультативов объявляются в начале учебного периода: четверти, полугодия. В факультативе участвуют, как минимум 6 учеников, как максимум 20, всё зависит от заявленной темы.

Тема. Логические истины (225 минут).

Очевидно, что каждая наука имеет свой словарь. Например, в биологическом словаре: анабиоз, бактериофаг, гаметы, ген, клетка, селекция, штамм; в музыкальном словаре: бард, двойной хор, запев, звукоряд, фальцет; в физическом словаре: масса, путь, скорость; в химическом — молекула, моль, реакция; в математическом - многоугольник, число, уравнение, функция.

Выясним, какие слова входят в словарь математической логики, а также что такое логическая истина. Рассмотрим известное предложение: “Если все люди смертны (*1)и все герои – люди (*2), то все герои смертны (*3)”. Ясно, что это предложение истинное. Заменим в этом предложении слова «люди», «смертны» и «герои» соответственно словами «животные», «дышат», «кошки». Получим новое предложение: «Если все животные дышат и все кошки— животные, то все кошки дышат», которое также истинное. Таких замен можно привести достаточно много. Приведённые предложения имеют различные сюжеты (содержание или смысл), однако, их истинность не нарушилась от замены содержания.Очистим рассматриваемые предложения от их содержания, и получим форму:

„Если все *1, *2 и все *3 есть *1 все *3 *2“

Подставив в полученную форму одни и те же слова вместо одинаково пронумерованных звёздочек, всегда получим истинные предложения. Итак, предложения, истинность которых зависит только от формы и не зависит от содержания, называются логически истинными предложениями (логическими истинами).

Логических истин бесконечно много. Вот некоторые из них:

Я сдам или не сдам зачёт по математике.

Из того, что если я отдыхаю, то я сплю, следует, что если я не сплю, то я не отдыхаю.

Электрическое напряжение в сети либо есть, либо его нет.

Если существует x такое, что 5 – x = 0, то не для всех x не имеет места 5 – x = 0.

Слова, из которых строится форма предложения, составляют логический словарь.

Это — “и”, “или”, “не”, “если…, то…”, “тогда и только тогда”, “все”, “существует”, “некоторые”, “никакой” и т.д.

Изучение логических истин, или тавтологий —одна из основных задач математической логики. Здесь следует обратить внимание, что критерий истинности в логике не такой, как в естественных науках. В естественных науках важна не форма, а содержание. Подтверждение истинности в естественных науках требует проведение эксперимента, наблюдений. В логике критерий истинности во многом определяется синтаксической структурой (формой) предложения.

При аксиоматическом построении математики (например, геометрии) теорему мы рассматриваем как некое условное предложение, логическую истинность которого доказываем.

Рассмотрим основные понятия и символику математической логики,следуя [4].

Высказывание —предложение, в котором что-либо утверждается или отрицается о свойствах реальных объектов (предметов, явлений, процессов). Итак, высказывание — это предложение, о котором имеет смысл, спросить, истинно оно или ложно. („2 +2 = 5“, „3— простое число“— высказывания, а побудительные или вопросительные предложения высказываниями не являются, например „посчитай 7 + 8“, „Любишь ли ты читать?“ Для обозначения используют буквы латинского алфавита.

Переменная — буква с соотнесенным с ней классом объектов, которые называют значениями переменных. Пример. Класс объектов для переменной x— все насекомые, „комары“— значение переменной x.

Здесь следует указать на один устоявшийся оборот речи, который может приводить к недоразумениям. Когда говорят: „Найдите переменную xв выражении 2 + x = 5“, то имеют ввиду не то, чтобы указать, где этот xесть, не букву „x“найти, а найти такое значение переменной x, при котором выражение 2 + x = 5 будет верным.Но поскольку естественная человеческая речь стремится к сокращениям, так долго, хотя и точно, редко кто выражается, как правило, люди предпочитают говорить более короткими фразами, хотя точность при этом теряется.

Предикат — предложение, содержащее хотя бы одно переменное и обращающееся в высказывание для некоторых наборов значений всех переменных, входящих в предложение. Предикаты с одним неизвестным — называют одноместными, с двумя — двуместными и т.д. Пример. x< 5 — одноместный предикат с областью значений для переменной x — все действительные числа. При x = –12 — истинное высказывание, при x= 45 — ложное.

По аналогиих – y = 7 — двуместный предикат с областью значений (x; y), где и x и y — действительные числа. Подстановка (1; – 6) вместо переменных xи yпревращает предикат в истинное высказывание, (1; 6) — в ложное.

Предикаты обозначаются: A(x), B(y), …, A(x; y), … Из высказываний и предикатов с помощью частицы „НЕ“ (операция логического отрицания, инверсия, $\neg$A(x) = не A(x)); союзов„И“ (логическое умножение, конъюнкция, знаки &, $\cap$), „ИЛИ“ (логическое сложение, дизъюнкция, знак $\cup$); оборотов речи: „ЕСЛИ…, ТО“ (логическое следование, импликация), „…ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА…“ (логическое равенство, эквивалентность) можно составлять более сложные объекты, называемые формулами.

Кроме логических связок в логике используются кванторы. Всего кванторов два. Квантор всеобщности: „ДЛЯ КАЖДОГО x“ (знак $\forall x$). Квантор существования: „СУЩЕСТВУЕТ ТАКОЕ x“ (знак $\exists x$). Квантор и одноместный предикат дают высказывание. Например, высказывание $(\forall x)A(x)$ истинно,если для каждого значения x высказывание A(x) будетистинным.

Умозаключение — это форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких суждений (посылок) можно получить новое суждение (заключение). Посылки могут быть только истинными суждениями.

В логике принято однозначно определять истинность сложного высказывания через истинность высказываний его составляющих, пользуясь следующими договоренностями.

Алгебра высказываний была разработана для того, чтобы можно было определять истинность или ложность составных высказываний, не вникая в их содержание. Суждениям (простым высказываниям) ставятся в соответствие логические переменные, обозначаемые прописными буквами латинского алфавита. Истинному высказыванию соответствует значение логической переменной 1, а ложному — 0. Тогда легко составить для каждого логического высказывания таблицу истинности, наподобие таблицы сложения и умножения. Таблицы истинности мы здесь приводить не будем, поскольку они общеизвестны и легко восстанавливаются самостоятельно.

Приложение 1. Задачи

Автор широко известной книги «Алиса в Стране чудес» любил задавать следующую задачу из четырех фраз: «Из двух одно: или злоумышленник уехал в экипаже, или свидетель ошибся. Если злоумышленник имел сообщника, то он уехал в экипаже. У злоумышленника не было ни сообщника, ни ключа или у него был сообщник и был ключ. У злоумышленника был ключ». Какой вывод отсюда можно сделать?

Обозначим переменные:

a— злоумышленник имел сообщника

b— злоумышленник уехал в экипаже

c— у злоумышленника был ключ.

Теперь запишем условие задачи с помощью кванторов:

$$(a \to b) \land \left((\overline{a} \land \overline{c}) \lor (a \land c)\right)$$

Мы знаем что, высказывание „у злоумышленника был ключ“ — истинно, то есть истинностное значение c = 1. Тогда заменим в предыдущем выражении c на 1:

$$(a \to b) \land \left((\overline{a} \land \overline{1}) \lor (a \land 1)\right)$$

Используя свойства высказываний и логических операций упростим последнее выражение:

$$(a \to b) \land \left((\overline{a} \land 0) \lor a\right)$$

$$(a \to b) \land (0 \lor a)$$

$$(a \to b) \land a$$

$$(\overline{a} \lor b) \land a$$

Раскрываем скобки:

$$(\overline{a} \land a) \lor (b \land a)$$

$$0 \lor (b \land a)$$

Получаем вывод: $a \land b$ — злоумышленникимелсообщника и уехал в экипаже.

Мы согласны с [5], что логическая подготовка школьников может быть разделена на три этапа.

1. Подготовительный этап

Необходимо учить школьников (начинать можно уже в начальной школе) понимать логическую структуру предложений и правильно применять слова и словосочетания, такие как: “и”, “или”, “не”, “хотя бы…”, “если…, то…”, “необходимо”, “достаточно”, “необходимо и достаточно”, “все”, “некоторые” и др. Постепенно приучать находить истинность или ложность сложных предложений в зависимости от их логического строения и истинностных значений, составляющих их предложений.

Особое внимание необходимо уделить выработке навыка правильного понимания условных предложений. Кроме того, в разумных пределах, необходимо учить школьников пользоваться логической символикой.

2. Формирование понятия о логическом законе

Идею логического закона следует формировать постепенно, не стремясь к формальным и строгим определениям. Необходимо в начале научить выделять логические истины, делая акцент на их отличии от не логических, фактических истин, учить замечать общую форму логических истин, прибегая к символике, доказывать простые логические законы и опровергать ошибочные гипотезы о логической истинности предложений.

3. Выработка навыков использования логических законов в рассуждениях.

Без четкого понимания логических связей, логических законов, отношений следования и эквивалентности ученики способны лишь заучить доказательство, оказываются беспомощными в попытках самостоятельно его отыскать.

Одна из центральных задач обучения математике состоит в обучении установлению истинности математических предложений (чаще всего с помощью доказательства), а истинностные значения этих предложений зависят от их логической структуры, то естественно считать одной из главных задач обучения математике раскрытие логической структуры математических предложений.

Каждая математическая теория представляет собой множество предложений, описывающее какую-то структуру (если эта теория излагается содержательно в определенной конкретной интерпретации, как это имеет место в школьном обучении).

Принадлежность предложения к некоторой математической теории определяется двумя признаками:

- предложение записано (или сформулировано) на языке данной теории, состоит из математических (принадлежащих языку теории) и логических терминов или символов и не содержит никаких других терминов или символов;
- предложение истинно, т. е. является или исходным истинным предложением (аксиомой) данной теории, или его истинность устанавливается доказательством с помощью уже известных (исходных или ранее доказанных) истинных предложений.

Например, предложение «Вертикальные углы равны» является геометрическим предложением, принадлежит теории евклидовой геометрии, потому что: оно записано на языке геометрии (и одновременно па русском языке), т. е. состоит из геометрических («вертикальные углы») и логических («равны») терминов или символов; оно истинно, так как доказывается в рамках евклидовой геометрии, т. е. на основе ее аксиом или других уже доказанных предложений этой теории.

С каждым математическим предложением связаны содержание (выраженное в нем математическое содержание) и логическая форма (или структура).

Представление, что можно ограничиться в обучении математике лишь раскрытием содержания каждого математического предложения, ошибочно. Содержание неразрывно связано с формой, и нельзя осмыслить первое без понимания второй.

Раскрыть логическую структуру сложного (составного) предложения — значит показать, из каких элементарных предложений сконструировано данное сложное предложение и как оно составлено из них, т. е. с помощью каких и в каком порядке применяемых логических связок (слов или сочетаний слов) «не», «и», «или» , «если..., то» , «тогда и только тогда», «для всякого», «существует» (и некоторых синонимических выражений), обозначающих логические операции, с помощью которых из одних предложений образуются другие.

Всякое математическое (и не только математическое) предложение либо элементарное, (не расчленяется на части, каждая из которых в свою очередь есть предложение), либо построено из элементарных, определенным образом соединенных между собой логическими связками. Логическую структуру любого сложного предложения необходимо раскрывать с обязательным разъяснением точного смысла применяемых логических связок.

Такое разъяснение необходимо потому, что, применение, даже многократное, перечисленных выше слов само по себе еще не обеспечивает правильного понимания их смысла. Не только школьники, но и некоторые взрослые, много тысяч раз применявшие в своих рассуждениях союз «или», отвечают отрицательно, например, на вопрос: «Истинно ли предложение» 4 < 14 или 4 = 14’’?».

Без понимания точного смысла логических связок не может быть достигнуто и правильное понимание точного смысла всей логико-математической конструкции, т. е. математического предложения, образованного с их участием, а следовательно, и выраженного в нем математического содержания.

Роль элементов логики в теории и практике обучения математике состоит в том, что, во-первых, усвоение общих логических приемов мышления является необходимым условием формирования и развития познавательной деятельности учащихся и, во-вторых, разработанные в рамках математической логики некоторые общие понятия (высказывание, логические операции, отношение следования и др.) способствуют раскрытию структуры и более глубокому пониманию математического содержания. Речь идет лишь о разумном, дидактически целесообразном применении некоторых логических понятий и обозначений как важных вспомогательных средств обучения. Переоценка роли логики как одной из основ теории обучения математике так же вредна, как и недооценка этой роли.

Список использованной литературы:

1 Шапиро С.И. Решение логических и игровых задач (логико-психологические этюды). – М.: Радио и связь, 1984. – 152 с.

2 Алексеева О.В. Логическая подготовка младших школьников при обучении математике: автореферат дисс.канд. пед. Наук – М., 2000.– 19 с.

3 Бирюков Б.В. Как возникла и развивалась математическая логика // Вопросы философии, 1959. – № 7. – С. 112-121

4 Болтянский В.Г. Использование логической символики при работе с определениями // Математика в школе. – 1973. – № 5. – С. 45-50

5 Артамонов М.А. Элементы логики в курсе математики средней школы. – Львов, 1957.

IRSTI 27.23

B. Madiyeva[1], *V. Verbovskiy*[2]
[1]Kazakh National University named after al-Farabi, Almaty, Kazakhstan
[2]Suleyman Demirel University, Almaty, Kazakhstan

SOME PROPERTIES OF FINITELY QUILTED ORDERED GROUPS

Abstract. As it was proved by B. Kulpeshov, any cut in aweakly o-minimal structures can have at most two extensions up to complete types, and the sets of realizations of these types are convex in any elementary extensions. In this paper we consider a generalization of weak o-minimality, namely notion of an n-quilted structure: a totally ordered structure is said to be n-quilted if any cut has at most n extensions up to complete types over the structure. Note that we omit here condition that the set of all realizations of a type must be convex. In this article we investigate basic properties of n-quilted ordered groups.

Key words: mathematical logic,model theory, o-minimality, ordered groups, a cut, a complete type.

***

Аңдатпа. Б. Кулпешов дәлелдегендей, әлсіз о-минимал құрылымда барлық қиманың екіден көп емес толық типқа дейін кеңейтулері болуы мүмкін, оған қоса типтің барлық орындалу жиыныәрбірқарапайым кеңейтуде дөңес болады. Бұл мақалада біз әлсіз о-минимал түсінігін жинақтап, келесі n-сырылған құрылымның түсінігін береміз: егер сызықтық реттелген құрылымның барлық қималарында n-нан көп емес толық типқа дейін кеңейтулері болса, сызықтық реттелген құрылым n-сырылған деп аталады. Бұл жерде біз типтің барлық