*ҒТАМР 27.03.02*

*А. А. Ералиева*[1]
[1]С. Демирел атындағы Университеті, Қаскелең қ., Қазақстан

# ТӨРТІНШІ ДӘРЕЖЕЛІ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУ ТӘСІЛДЕРІ

**Андатпа.** Мақала, элементар математика пәндерінің «жаңартылған бағдарламаға» көшуіне байланысты туындаған төртінші дәрежелі теңдеулерді шешу мәселесіне арналған. Элементар математика бұл бағдарламаға көшкенге дейін де төртінші дәрежелі теңдеулер белгілі деңгейде қарастырылған. Алайда мектеп математикасының жаңа мазмұнға көшуі бұл жағдайға жаңа серпін береді деп ойлаймыз. Сол себепті, мақалада төртінші дәрежелі теңдеулерді шешудің жаңа тәсілі «Феррари әдісі» және оның негізінде шешілетін есеп түрлері қарастырылған. Мақала, математиканы оқыту әдістемесі саласының мамандарына, мұғалімдерге, докоранттар мен магистранттарға арналған.

**Түйін сөздер:** Теңдеу, теңдеудің түрі, теңдеудің шешімі, сызықтық теңдеулер, квадраттық теңдеулер, көрсеткіштік теңдеулер, логарифимдік теңдеулер, тригонометриялық теңдеулер, рационалдық теңдеулер, иррационалдық теңдеулер, үшінші дәрежелі теңдеулер, төртінші дәрежелі теңдеулер, Кордана формуласы, комплекс сан, комплекс түбірлер.

***

**Abstract.** The article is devoted to the problem of solving equations of the fourth degree, which arose in connection with the transition of elementary mathematics subjects to the "updated program". Even before elementary mathematics moved into this program, equations of the fourth degree were considered at a certain level. However, we think that the transition of school mathematics to a new content will give a new impetus to this situation. For this reason, the article presents a new method for solving equations of the fourth degree "the Ferrari method" and the types of problems solved on its basis. The article is intended for specialists in the field of methods of teaching mathematics, teachers, doctoral students and graduate students.

**Keywords:** Equation, equation type, equation solution, linear equations, quadratic equations, exponential equations, logarithmic equations, trigonometric equations, rational equations, irrational equations, third degree equations, fourth-degree equations, Kordana's formula, complex number, complex roots.

***

**Аннотация**. Статья посвящена проблеме решения уравнений четвертой степени, возникшей в связи с переходом предметов

элементарной математики на «обновленную программу». Еще до того, как элементарная математика перешла в эту программу, уравнения четвертой степени рассматривались на определенном уровне. Однако мы думаем, что переход школьной математики на новое содержание придаст новый импульс этой ситуации. По этой причине в статье представлен новый метод решения уравнений четвертой степени «метод Феррари» и типы решаемых на его основе задач. Статья предназначена для специалистов в области методики преподавания математики, преподавателей, докторантов и аспирантов.

**Ключевые слова:** Уравнение, тип уравнения, решение уравнения, линейные уравнения, квадратные уравнения, показательные уравнения, логарифмические уравнения, тригонометрические уравнения, рациональные уравнения, иррациональные уравнения, уравнения третьей степени, уравнения четвертой степени, формула Корданы, комплексное число, комплексные корни.

*Төртінші дәрежелі теңдеулерді шешу*

***1-мысал***. Теңдеуді шешіңіз: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Шешуі: $t = x^2 \quad (t > 0)$ алмастыруын енгіземіз,

$t^2 - t + 36 = 0$

$(t - 9)(t - 4) = 0$

$t_1 = 9 \implies x^2 = 9 \implies x = \pm 3$

$t_2 = 4 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$

Жауабы: -3; -2; 2; 3.

**2-мысал**. Теңдеуді шешіңіз: $16x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 9$

Шешуі: $16[x(x + 3)][(x + 1)(x + 2)] = 9$

$16(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 9$

$x^2 + 3x = t$

$16t(t + 2) = 9$

$16t^2 + 32t - 9 = 0$

$$t_1 = \frac{1}{4}, \quad t_2 = -\frac{9}{4}$$

$$t_1 = \frac{1}{4} \implies x^2 + 3x = \frac{1}{4} \implies 4x^2 + 12x - 1 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$t_2 = -\frac{9}{4} \implies x^2 + 3x = -\frac{9}{4} \implies 4x^2 + 12x + 9 = 0 \implies x_{3,4} = \pm\frac{3}{2}$$

Жауабы: $\frac{-3-\sqrt{10}}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{-3+\sqrt{10}}{2}; \frac{3}{2}$.

*3-мысал.* Теңдеуді шешіңіз: $(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$

Шешуі: $x^2 + x + 1 = t \implies -3x^2 - 3x - 1 = -3t + 2$

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \implies t_1 = 1, \qquad t_2 = 2$$

$t_1 = 1 \implies x^2 + x + 1 = 1 \implies x^2 + x = 0 \implies x_1 = 0, x_1 = -1.$

$t_2 = 2 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Жауабы: $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1; 0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

*Лодовико (Луиджи) Феррари*

Лодовико (Луиджи) Феррари ( итал. Lodovico Ferrari ; 2 ақпан 1522 , Болонья — 5 қазан 1565 ) — төртінші дәрежелі теңдеудің жалпы шешімін тапқан итальян математигі. 15 жасынан бастап Луиджи Феррари миландық математик Джероламо Карданоның шәкірті болды және керемет қабілеттерін тез ашты. Осы уақытқа дейін Кардано кубтық теңдеулерді шешу алгоритмін білген; Феррари төртінші дәрежелі теңдеулерді шешудің ұқсас әдісін таба алды. Кардано екі алгоритмді де өзінің High Art кітабында жариялады.

1540 жылы он сегіз жасар Феррари Милан университетінің профессоры болды, бірақ 1556 жылы ол өзінің туған жері Болоньяға оралды, онда ол математика профессоры болды. Алайда, көп ұзамай, 44 жасқа толғанға дейін ол кенеттен қайтыс болды - тұрақты қауесеттерге сәйкес, өз әпкесі немесе оның сүйіктісі улаған. Ол ешқашан бірде-бір математикалық жұмысты басып шығара алмады.

*Феррари әдісі*

Кез келген сандар өрісіндегі $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (1)
төртінші дәрежелі теңдеу берілсін. Бұл теңдеуді шешу үшін Феррари әдісін пайдаланып, куб теңдеуді шешуге келтіреміз. Берілген теңдеуді $x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$ түрінде жазып аламыз. Осы теңдеудің екі жағына да $\frac{a^2x^2}{4}$ өрнегін қосамыз, сонда теңдеудің сол жағы екі санның қосындысының толық квадратын береді:

$$(x^2 + \frac{ax}{2})^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d \qquad (2)$$

Соңғы теңдеудің екі жағына да $\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4}$ өрнегін қоссақ, теңдеудің сол жағы үш санның қосындысының толық квадратын береді:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{a}{2}y - c\right)x + (\frac{y^2}{4} - d)$$

Енді y-ті (2) теңдеуінің оң жағы толық квадрат болатындай етіп таңдаймыз. Ол үшін

$$B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{2}y - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)\left(\frac{y^2}{4} - d\right) = 0$$

болу керек. Бұл үшінші дәрежелі теңдеу. Оның бір түбірі $y_0$-ді тапсақ жеткілікті. $y_0$-ді (2) теңдеуіндегі орнына қойып, $(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2})^2 = (\alpha x + \beta)^2$ теңдеуін аламыз. Соңғы теңдеу мынадай:

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = \alpha x + \beta$$
$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = -(\alpha x + \beta)$$

екі теңдеуге мәндес. Бұл теңдеулерді шешіп, берілген теңдеудің төрт түбірін аламыз.

Төртінші дәрежелі теңдеулерді Феррари әдісі арқылы шешу

*1-мысал:* $x^4 - 12x^3 + 41x^2 - 18x - 72 = 0$

Шешуі: $x^4 - 12x^3 + 41x^2 - 18x - 72 = 0$
$x^4 - 12x^3 = -41x^2 + 18x + 72$
$(x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 6x + 36x^2 = -41x^2 + 18x + 72 + 36x^2$
$(x^2 - 6x)^2 = -5x^2 + 18x + 72$
$(x^2 - 6x + \lambda)^2 = -5x^2 + 18x + 72 + \lambda^2 + 2\lambda(x^2 - 6x)$
$(x^2 - 6x + \lambda)^2 = -5x^2 + 18x + 72 + \lambda^2 + 2\lambda x^2 - 12\lambda x$
$(x^2 - 6x + \lambda)^2 = (-5 + 2\lambda)x^2 + (18 - 12\lambda)x + (\lambda^2 + 72)$
$b^2 - 4ac \implies (18 - 12\lambda)^2 = 4(-5 + 2\lambda)(\lambda^2 + 72)$

$$324 - 432\lambda + 144\lambda^2 = -20\lambda^2 - 1440 + 8\lambda^3 + 576\lambda$$
$$8\lambda^3 - 164\lambda^2 + 1008\lambda - 1764 = 0$$
$$\lambda = 3; 7; \frac{21}{2}$$

$\lambda = 3 \implies (x^2 - 6x + \lambda)^2 = (-5 + 2\lambda)x^2 + (18 - 12\lambda)x + (\lambda^2 + 72) \implies$
$(x^2 - 6x + 3)^2 = 1 \cdot x^2 - 18x + 81$
$(x^2 - 6x + 3)^2 = (x - 9)^2$
$(x^2 - 6x + 3)^2 - (x - 9)^2 = 0$
$(x^2 - 6x + 3 + x - 9)(x^2 - 6x + 3 - x + 9)$
$(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 7x + 12) = 0$
$x^2 - 5x + 6 = 0$ $\quad\quad x^2 - 7x + 12 = 0$
$x = -1; 6.$ $\quad\quad x = 3; 4$
Жауабы: -1; 3; 4; 6.

*2-мысал:* $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$
Шешуі: $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$
$x^4 = 3x^2 + 42x + 40$
$(x^2)^2 = 3x^2 + 42x + 40$
$(x^2 + \lambda)^2 = \lambda^2 + 2\lambda x^2 + 3x^2 + 42x + 40$
$(x^2 + \lambda)^2 = (2\lambda + 3)x^2 + 42x + (\lambda^2 + 40)$
$\lambda = 3$
$(x^2 + 3)^2 = 9x^2 + 42x + 49$

$(x^2+3)^2=(3x+7)^2$
$x^2+3=\pm(3x+7)$
1) $x^2+3=3x+7$
$x^2+3-3x-7=0$
$x^2-3x-4=0$
$x^2+x-4x-4=0$
$x(x+1)-4(x+1)=0$
$(x+1)(x-4)=0$
$x=-1;4$
2) $x^2+3=-(3x+7)$
$x^2+3+3x+7=0$
$x^2+3x+10=0$
$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-40}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{-31}}{2}=\frac{-3\pm i\sqrt{31}}{2}$
Жауабы: -1; 4; $\frac{-3+i\sqrt{31}}{2}$; $\frac{-3-i\sqrt{31}}{2}$.

*3-мысал:* $x^4-3x^2-6x-2=0$
Шешуі: $x^4-3x^2-6x-2=0$
$x^4=3x^2+6x+2$
$(x^2)^2=3x^2+6x+2$
$(x^2+k)^2=k^2+2kx^2+3x^2+6x+2$
$(x^2+k)^2=(2k+3)x^2+6x+(2+k^2)$
$2k+3=4$
$k=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2+k^2=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$
$(x^2+\frac{1}{2})^2=4x^2+6x+\frac{9}{4}=(2x+\frac{3}{2})^2$
$x^2+\frac{1}{2}=\pm(2x+\frac{3}{2})$
1) $x^2+\frac{1}{2}=2x+\frac{3}{2}$
$x^2+\frac{1}{2}-2x-\frac{3}{2}=0$
$x^2-2x-1=0$
$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{4+4}}{2\cdot1}=\ x=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$

2) $x^2+\frac{1}{2}=-(2x+\frac{3}{2})$
$x^2+\frac{1}{2}+2x+\frac{3}{2}=0$
$x^2+2x+2=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2\cdot 1}= x=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i$$

Жауабы: $1\pm\sqrt{2}$; $-1\pm i$.

*4-мысал:* $2x^4-8x^3+2x^2+24x-14=0$

Шешуі: $2x^4-8x^3+2x^2+24x-14=0$

$$x^4-4x^3+x^2+12x-7=0$$
$$z=x-\frac{4}{4\cdot 1}=x-1 \quad \Rightarrow \quad x=z+1$$
$$0=z^4-5z^2+6z+3$$
$$z^4=5z^2-6z-3$$
$$z^4+(2uz^2+u^2)=5z^2-6z-3+(2uz^2+u^2)$$
$$z^4+2uz^2+u^2=(2u+5)z^2-6z+u^2-3$$
$$(z^2+u)^2=(2u+5)(z^2-\frac{6}{2u+5}\cdot z+\frac{u^2-3}{2u+5})$$
$$D=0=(\frac{6}{2u+5})^2-4\cdot\frac{u^2-3}{2u+5}$$
$$0=36-4(u^2-3)(2u+5)$$
$$0=8u^3+20u^2-24u-96$$
$$u=2$$
$$(z^2+2)^2=(\pm\sqrt{2\cdot 2+5})^2(z-\frac{6}{2(2\cdot 2+5)})^2$$
$$z^2+2=\pm 3(z-\frac{1}{3})$$
$$z^2+2=\pm 3z\mp 1$$

1) $z^2+2=3z-1$

$$z^2-3z+3=0$$
$$z=\frac{3\pm\sqrt{9-12}}{2}=\frac{3\pm i\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x=z+1=\frac{3\pm i\sqrt{3}}{2}+1=\frac{5\pm i\sqrt{3}}{2}$$

2) $z^2+2=-3z+1$

$$z^2+3z+1=0$$
$$z=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad x=z+1=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}+1=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Жауабы: $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{5-i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{5+i\sqrt{3}}{2}$.

Алынған тақырыпты сараптай келе төмендегідей қорытындыларға келуге болады деп тұжырымдаймыз: Біз, ұсынып отырған мақалада, бүтін сандардың бөлінгіштігі» негізінде шешілетін күрделі мәтінді есептерді теориялық және практикалық тұрғыдан талдауға күш салдық. Әрине, бір мақала көлемінде мұндай ауқымды мәселе өз шешімін толық тауып кетеді деген ойдан біз аулақпыз және де ол мүмкін еместе. Дейтұрғанмен, осы талдаудың өзі біраз қорытынды тұжырымдар жасауға негіз болып отыр.

1 Элементар математиканың жаңартылған бағдарламасы комплекс сандарды міндеттіі материал ретінде қарастырады. Ал бұл өз кезегінде үшінші және төртінші дәрежелі теңдеулерді шешуді қарастыруға негіз болады.
2 Төртінщі дәрежелі теңдеулерді шешу барысында цифрлық ресурстарды қолдану бұл мәселелер жайлы оқушылардың біліктілгінің берік болуына тікелей әсер етеді.
3 3.Төртінші дәрежелі теңдеулерді шешу және оларды шешу жайлы таңдау немесе қолданбалы курстар керек деп есептейміз.

**Пайдаланған әдебиеттер**

1 Қайыңбаев Ж.Т. Жаттығу, есеп .«Математика және Физика журналы»№3,2017. 2-4 б.
2 Ж.Т. Қайыңбаев. Үш обьектінің қозғалысына байланысты күрделі мәтінді есептер. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods. 2020/2 (53).
3 Кулагин Е.Д. и др 3000 конкурсных задач по математике. – М., 2003. – 380 с.
4 Баженова Н.Г. Теория и методика решения текстовых задач: курсы по выбору для студентов специальности 050201 – Математика (Электронный ресурс): учеб.пособ/Н.Г.Баженова, И.Г.Одевцева.- 4-е изд., стер. - М.:Флинта, 2017. - 89 с.
5 5.Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. — издание третье, расширенное. — М.: МЦНМО, 2001. — С. 8—42. — 448 с. — 5000 экз. — ISBN 5-900916-83-9.
6 6.Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. Джироламо Кардано. — М.: Знание, 1980. — 192 с. — (Творцы науки и техники). — 100 000 экз.
7 7.Никифоровский В. А. Из истории алгебры XVI—XVII веков. — М.: Наука, 1979. — С. 42—88. — 208 с. — (История науки и техники). — 45 000 экз.
8 8.Бурбаки Н. Очерки по истории математики = Elements d'histoire des mathematiques / Перевод: Изабелла Башмакова. — М.: Издательство иностранной литературы, 1963. — 294 с. — (Элементы математики).
9 9. Әбілқасымова. А.Е және басқалар. Алгебра және анализ бастамалары. 10,11-сынып. Жаратылыстану-математикалық бағыт. Алматы, 2014,2015 ж.

10 10. Шыныбеков Ә.Н., Шыныбеков Д.Ә., Жұмабаев Р.Н. Алгебра және анализ бастамалары. 10-сынып. Жаратылыстану-математикалық бағыт. Алматы, Атамұра, 2019ж.