МРНТИ 27.15.17

О.А. Баймуратов[1], *Е.Б. Құдайберген*[1]
[1]Университет имени Сулеймана Демиреля, Казахстан, г. Каскелен

АНАЛИЗ «ЧИСЛА КАТАЛАНА» И ЕЕ ЗНАЧИМОСТЬ В ТЕХНИЧЕСКИХ НАУКАХ

Аннотация. Рассмотрены возможности и способы для определения числа Каталана существуют десятки определения, которые базируются на рекуррентных соотношениях, методах и методологиях решений задач. В данной статье представлены результаты анализа трудов связанных с числами Каталана, более десятки методов и стандартных интерпретаций решении задач, в технических и гуманитарных дисциплинах. Рассмотрены возможности и способы для определения числа Каталана по диаграмме Юнга описан метод определения числа Каталана, подтвержденный решением задачи по определению всевозможных путей от пункта A до пункта B по диаграмме Юнга. Благодаря разработанному методу можно решать задачи в области применения комбинаторики: составление расписаний, составление меню, лингвистика (рассмотрение вариантов комбинаций букв), спортивные соревнования (расчёт количества игр между участниками), производство (распределение нескольких видов работ между рабочими), экономика (анализ вариантов купли-продажи акций), криптография (разработка методов шифрования), биология (расшифровка кода ДНК) и т.д., что позволяет в результате разработать новые алгоритмы.

Ключевые слова: числа Каталана, диаграмма Юнга, монотонные пути в квадрате.

***

Аңдатпа. Каталан санын анықтаудың мүмкіндіктері мен әдістері қарастырылған, қайталану қатынастары, мәселелерді шешу әдістері мен әдістеріне негізделген ондаған анықтамалар бар. Бұл мақалада каталан санына байланысты жұмыстарды талдаудың нәтижелері, оннан астам әдістер мен техникалық және гуманитарлық пәндердегі мәселелерді шешудің стандартты түсіндірмесі берілген. Юнг схемасына сәйкес каталантын санын анықтаудың мүмкіндіктері мен әдістері сипатталған, Юнг диаграммасына сәйкес A нүктесінен B нүктесіне дейінгі барлық мүмкін жолдарды анықтау мәселесін шеше отырып, каталанданың санын анықтау әдісі сипатталған. Дайындалған әдіс арқасында комбинаторлық қосымшалар саласында жоспарлау, мәзір жиынтығы, лингвистика (әріптік комбинациялар нұсқаларын ескере отырып), спорт жарыстары (қатысушылардың арасында ойындардың санын есептеу), өндіріс (қызметкерлердің арасында бірнеше жұмыс түрлерін тарату), экономика (сатып алу опцияларын талдау) - акцияларды сату, криптография (шифрлеу әдістерін дамыту), биология (ДНК кодының декодтауы) және т.б. нәтижесінде жаңа алгоритмдердің пайда болуына мүмкіндік береді.

Кілт сөздер: Каталан сандары, Юнг диаграммасы, шаршы алаңындағы монотонды жолдар.

***

Abstract. Opportunities and methods for determining the number of Catalan are considered. There are dozens of definitions that are based on recurrence relations, methods, and methodologies for solving problems. This article presents the results of the analysis of works related to the numbers of Catalan, more than a dozen methods and standard interpretations of solving problems in technical and humanitarian disciplines. The possibilities and methods for determining the number of Catalan according to the Jung diagram are described. The method for determining the number of Catalan, confirmed by solving the problem of determining all possible paths from point A to point B according to the Young diagram, is described. Thanks to the developed method, it is possible to solve problems in the field of combinatorial applications: scheduling, menu compilation, linguistics (considering options for combinations of letters), sports competitions (calculating the number of games between the participants), production (distribution of several types of work among workers), economics - sale of shares), cryptography (development of encryption methods), biology (decoding of the DNA code), etc., which allows the development of new algorithms as a result.

Keywords: Catalan numbers, Young diagram, monotone paths in a square.

Введение

На сегодняшний день существуют десятки определений чисел Каталана [1-18], которые базируются на рекуррентных соотношениях, методах и методологиях решений задач.

В мире математики и инженерных наук числа Каталана часто встречаются в задачах комбинаторики [1]. Где n-ое число Каталана — это:

- Количество корректных скобочных последовательностей, состоящих из n открывающих и n закрывающих скобок.
- Количество корневых бинарных деревьев с n+1 листьями (вершины не пронумерованы).
- Количество способов полностью разделить скобками n+1 множитель.
- Количество триангуляций выпуклого n+2-угольника (т.е. количество разбиений многоугольника непересекающимися диагоналями на треугольники).
- Количество способов соединить 2n точек на окружности n не пересекающимися хордами.

- Количество неизоморфных полных бинарных деревьев с n внутренними вершинами (т.е. имеющими хотя бы одного сына).
- Количество монотонных путей из точки (0, 0) в точку (n, n) в квадратной решетке размером n×n, не поднимающихся над главной диагональю.
- Количество перестановок длины n, которые можно отсортировать стеком (можно показать, что перестановка является сортирующей стеком тогда и только тогда, когда нет таких индексов $i < j < k$, что $a_k < a_i < a_j$.
- Количество непрерывных разбиений множества из n элементов (т.е. разбиений на непрерывные блоки).
- Количество способов покрыть лесенку 1…n с помощью n прямоугольников (имеется в виду фигура, состоящая из n столбцов, i-ый из которых имеет высоту j).

За последние 15 лет активно проявляют интерес к данным числам и часто обсуждаются среди ученых и исследователей. Из проведенных исследований было определено, что ряд гуманитарных дисциплин и направлений включают для решения прикладных и частных задач числа Каталана.

Из проведенного литературного анализа источников по теме научного исследования [1-18] труды можно наглядно определить активность ученых и исследователей опубликовавшие научные результаты и труды в известных рецензируемых научных базах данных в которых содержится более 12 миллионов материалов из 3500 научных журналов и 34 000 электронных книг.

В таблице 1 представлены данные с веб ресурса [2] по годам с 1995 года о наличии опубликованных трудов касательно чисел Каталана.

Основные методы, пути определения чисел Каталана

Из проведенного анализа источников представим несколько стандартных интерпретаций. Достаточно известные методы и методологии по определению чисел Каталана [2-18], которые включены в основные курсы для подготовки специалистов технического направления:

1. Оказывается, что (C_n)— это количество «*правильных*» скобочных структур из 2n скобок (n открывающих и n закрывающих). Скобочная структура называется правильной, если в любом левом отрезке структуры количество закрывающих скобок не превышает количества открывающих[2]-[5], [18] при n = 3:

$(((a1 * a2) * a3) * a4) \Rightarrow ((()))$
$((a1 * (a2 * a3)) * a4) \Rightarrow (()())$
$((a1 * a2) * (a3 * a4)) \Rightarrow (())()$
$(a1 * ((a2 * a3) * a4)) \Rightarrow ()(())$
$(a1 * (a2 * (a3 * a4))) \Rightarrow ()()()$

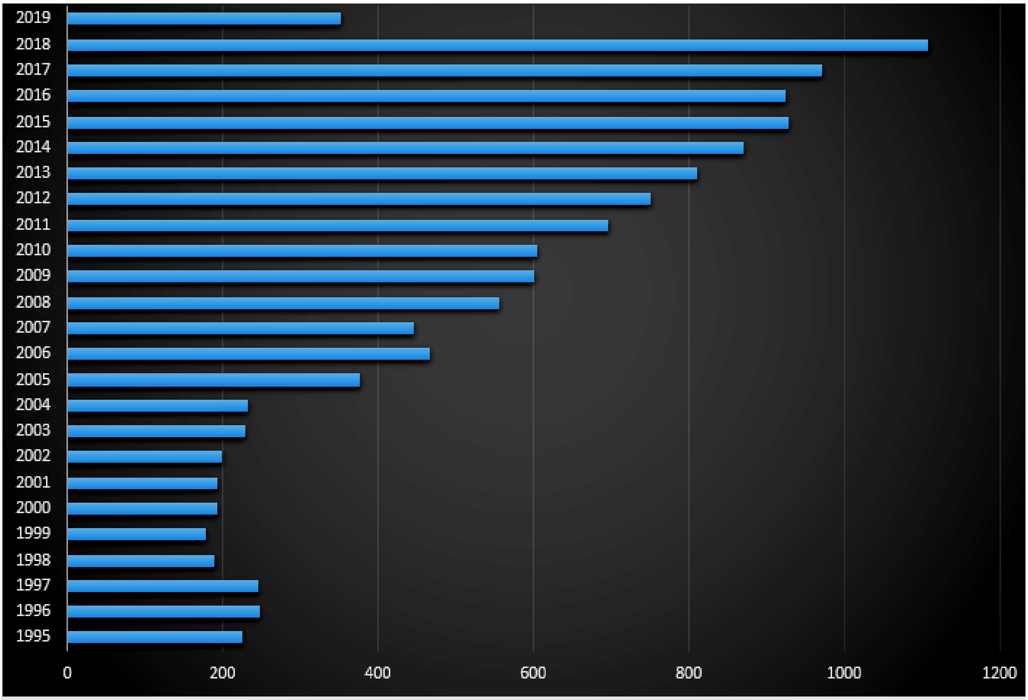


Рисунок 1 - Результаты анализа активности публикации в ScienceDirect [2]

Правильной скобочной структуре из 2n открывающих и 2n закрывающих скобок поставим в соответствие путь в квадрате [0, n]×[0, n]. Путь начинается в точке (0,0) и заканчивается в точке (n, n). Открывающей скобке сопоставляем горизонтальный отрезок длины 1, а закрывающей — вертикальный (рис.2)[3].

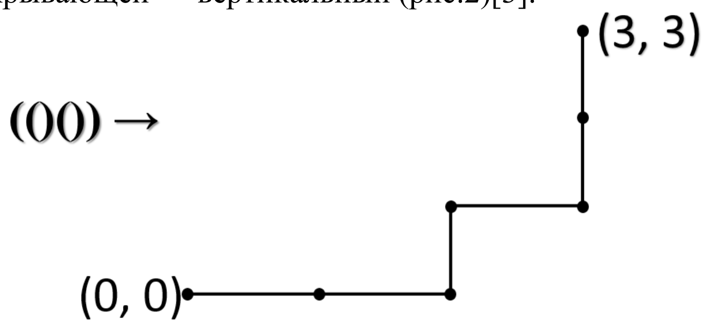


Рисунок 2 -монотонных путей в решетке

Если путь сопоставлен правильной структуре, то ни одна его точка не может лежать выше главной диагонали квадрата. Обратно, такому пути «*правильному пути*» сопоставляется правильная скобочная структура, гдегеометрическое представление правильных скобочных структур позволяет найти выражение для чисел Каталана.

2. «*Бинарные деревья*». Бинарными деревьями с фиксированной корневой вершиной называются графы вида — дерево „растет“ сверху вниз, из самой верхней вершины выходят 2 ребра вниз, из других вершин либо выходит одно ребро вверх, либо три ребра — одно вверх и два вниз (рис. 3). Вершины степени 1 (т.е. вершины, из которых выходит одно ребро вверх) будем называть концевыми. Количество бинарных деревьев с n концевыми вершинами равно C_{n-1} [3], [5].

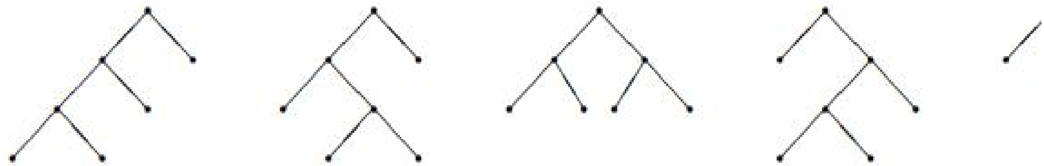


Рисунок 3 - бинарные деревья

3. Заполнения «*лесенки*». Рассмотрим нарисованную на клетчатой бумаге лесенку ширины и высоты n [3].

На рисунке 4 представлены все способы заполнения 3-лесенку тремя прямоугольниками.

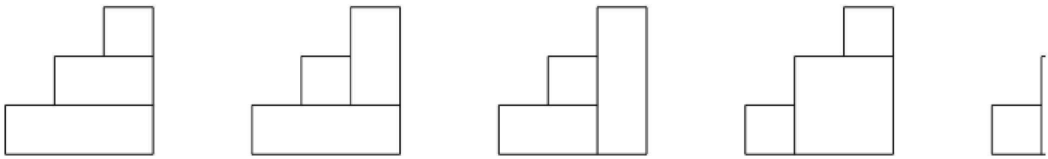


Рисунок 4 - лесенки

4. «*Стопка бревен*». Сколько различных стопок бревен можно возвести на основе из n плотно расположенных бревен?

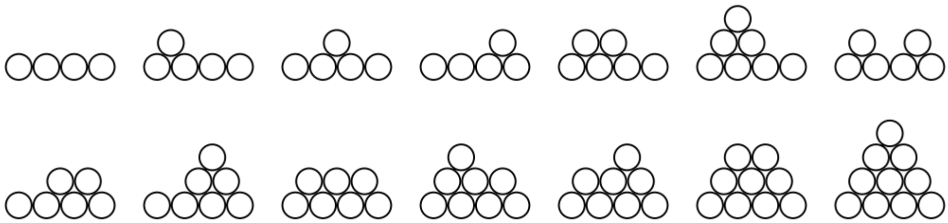


Рисунок 5 - стопки бревен (или монет)

Построив «*горный хребет*», (рис. 6) в клетчатой сетке, как показано ниже, понятно, что «*стопка бревен*» (рис. 5) — не что иное, как множество клеток под хребтом. Поэтому множество стопок — каталаново.

Клетки же, или бревна, можно считать и треугольными.[6]

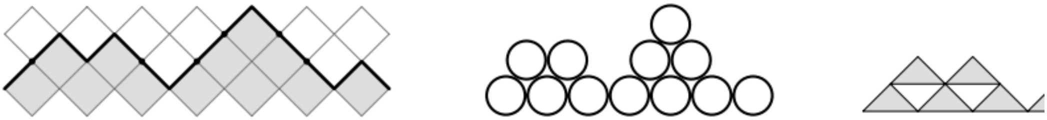


Рисунок 6 - горный хребет, стопка бревен и треугольники

5. «*Монотонные пути в квадрате*» – маршруты из левого нижнего угла квадрата в правый верхний, которые идут по линиям сетки вверх или вправо и не заходят выше диагонали. На рисунке 7 все такие пути для квадрата 3x3 [7].

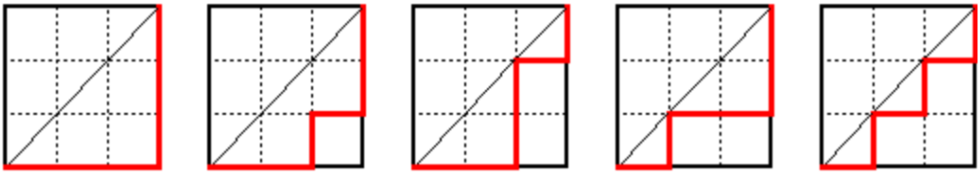


Рисунок 7 - монотонные пути в квадрате

6. «*Таблица Юнга*» – прямоугольник, заполненный последовательными числами так, чтобы они возрастали во всех строках и столбцах. Число таблиц Юнга размером 2xn также выражается числом Каталана (рис. 8).

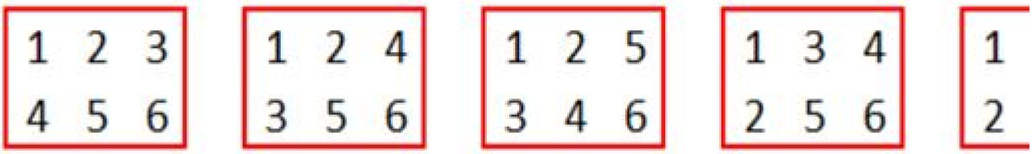


Рисунок 8 - таблица Юнга

Для каждой из этих конструкций можно либо по индукции, либо рекуррентными соотношениями доказать, что число соответствующих объектов выражается числом Каталана [7]. Также имеются соотношения, которые можно получить, используя некоторые из упомянутых построений, но это требует написания громоздких формул, чего хотелось бы избежать. Например, задачу о генерации всех бинарных деревьев (решение которой не очевидно) можно свести к гораздо более простой задаче о генерации скобочных последовательностей, [7].

Определение числа Каталана по диаграмме Юнга

Метод:

1) необходимо диаграмма Юнга

2) определяем условия строго по горизонтальной и вертикальной возрастающей

3) подставляем все возможные комбинации из чисел от 1 до n

Все возможные варианты нам определяет числа Каталана.

Методология:

Монотонных путей из точки (0, 0) в точку (n, n) в квадратной решетке размером n×n (рис. 9), не поднимающихся над главной диагональю.

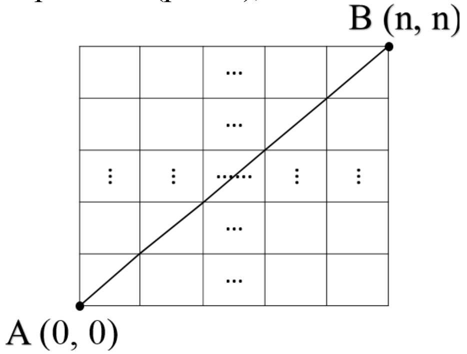


Рисунок 9 - квадратной решетка

После горизонтального отделения (рис. 10), верхняя является симметричной с нижней части. Теперь работаем сверхней частью для определения чисел Каталана.

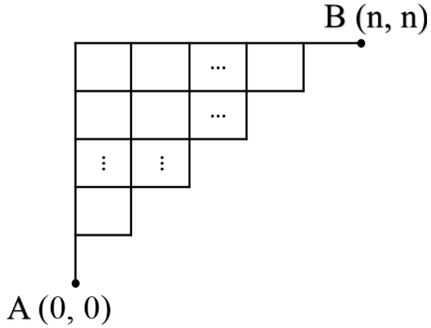


Рисунок 10 -квадратной решетка

Вместо замены приведенной выше диаграммы (рис. 10) можно сократить диаграмму, как показано на (рис. 11). Следовательно, если начнем с A (0, 0) на первом шаге будет только один путь. Если начинаем с A’ (0, 1) то решение безизменно. Аналогично от (n-1, n) до (n, n) будет только один путь. Теперь рассмотрим путь точками между (0, 1) и (n-1, n). Сначала даем самый маленкия числы и эти числы будет у нас индексной пример (рис.15) первый который из них. Если число в ячейке равно с индексной, то помещаем мину в верхний левый угол ячейки, если больше чем индексной то добавляется мина нижный правый уголу ячейки.

Теперь перейдем к графику (рис. 11). Пусть по строке и столбцами будет растит. Теперь поместим n (1.2.3, ... , n} в диаграмму. Каждая из различных систем начиналась в точках (0, 1) и будет принадлежать дорогу до (n-1, n).

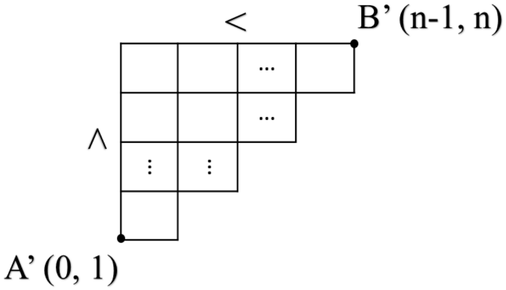
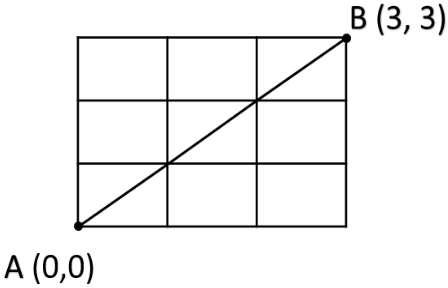


Рисунок 11 -диаграмма Юнга Рисунок

Поместите цифры от 1…n, n в диаграмму. Таким образом все возможныеварианты нам даёт число Каталана.

Пример: n=3, диаграмма размерностью 3x3 (рис. 12) потом делим на



главнойдиагонали

12 - квадратной решетка

и получаем (рис. 13), от точки А (0, 0) есть только один путь до точки А (0, 1) которые не влияете на решение получаемое между А (0, 1) и В (2, 3).

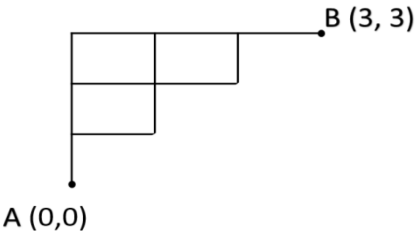


Рисунок 13 -верхняя часть от деления квадратной решетки по главной диагонали

А теперьприступаем кдиаграмме. Числа расположенные в ячейках по вертикали и по горизонтали должны строго расти (рис. 14).

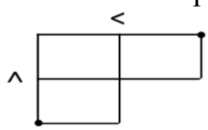


Рисунок 14 -диаграмма Юнга

Так как по условию задачиразмерностьдиаграммы 3х3 (n=3). Представим все возможные комбинации для этой диаграммы (рис. 15).

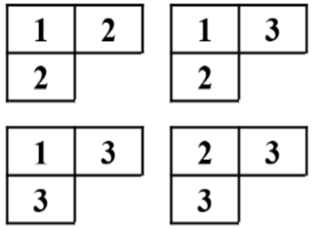
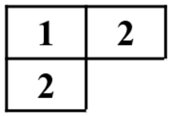


Рисунок 15 - все возможные комбинации чисел от 1 до 3

А потом поставим мина это так будет. С начало даем самый маленкия числы и эти числы будет у нас индексной (рис. 16).



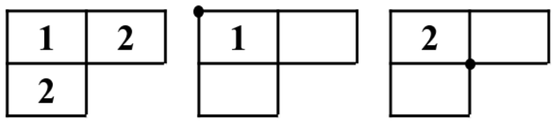
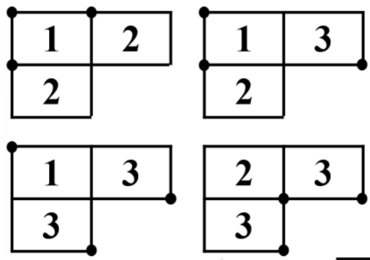


Рисунок 16 - диаграмма с индексной числами Рисунок 17 - диаграмма с миной

После определения индексной числы приступаем поставит мину. А мины будет так поставлено. Если индексной номер совпадает с силойварианте который стоит одной месте мы поставим мину верхний левый стороне а если больше чем индексной числе поставим мину на нижний правой стороне (рис. 17).И так выполняем все операции с этой системой по всем 5 вариантом на (рис. 18).



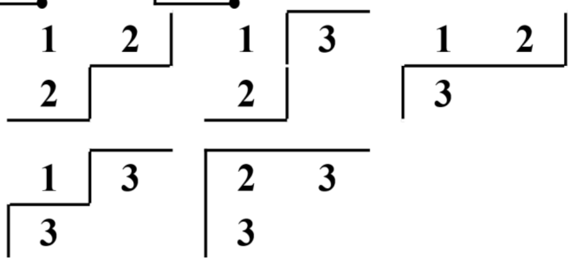


Рисунок 18 -диаграмма с миной Рисунок 19 - диаграмма без мины

Теперь удалим пути связанной с миной (рис. 19) и мины (рис. 19). Последный этап убераем все числы и у нас остается все возможный пути с A(0,0) до точку B(3,3) и суммируем количество путей. А количество все возможных путей нам дает числа Каталана (рис. 20).

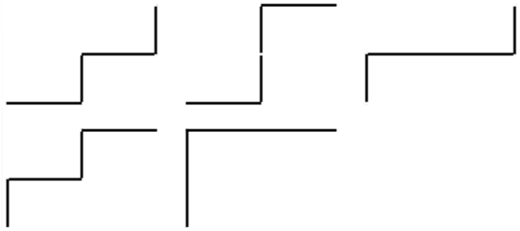


Рисунок 20 - все пути диаграмме 3 на 3

И так получили числа Каталана, как проверим. Уже вверху сказано строем биекция. Самый простой из них для бинарных деревя или скобка который Э.Ш.Каталан исследовал. Количество монотонных путей из точки (0, 0) в точку (n, n) в квадратной решетке размером n×n, не поднимающихся над главной диагональю.

Заключение

Из проведенных исследований было определено, что ряд гуманитарных дисциплин и направлений включают для решения прикладных и частных задач числа Каталана. Необходимо диаграмма Юнга потом определяем условия строго по горизонтальной и вертикальной возрастающей и подставляем все возможные комбинации из чисел от 1 до n и это один из методологии на монотонных путей из точки (0, 0) в точку (n, n) в квадратной решетке размером n×n, не поднимающихся над главной диагональю. Свою очередью сказано «*Монотонные пути в квадрате*» даёт числа Каталана.

В результате

Разработка нового упрощенного метода решения задачи чисел Каталана для полного понимания ее сущности. Как известно числа 1, 2, 5, 14, 42, ... встречаются в ответах комбинаторных задач еще чаще. Из проведенного анализа источников представили несколько стандартных интерпретаций. Достаточно известные методы и методологии по определению чисел Каталана, которые включены в основные курсы для подготовки специалистов технического направления. В конце новый упрощенного методологи по определению чисел Каталана.

Список использованной литературы:

1. Вычисление числа Каталана, интернет ресурс, 2 май 2009. URL:http://e-maxx.ru/algo/catalan_numbers

2. ScienceDirect, - ведущее информационное решение Elsevier для исследователей, Журналы и Книги интернет ресурс, 14.02.2019.URL:

https://www.sciencedirect.com/search?qs=catalan%20number&show=25&sortBy=relevance
3. Мурадян А.А., “Лекция 2 Числа Каталана”, интернет ресурс, 04.09.2008 http://miem-m-16.clan.su/lect_3.pdf
4. Г.Б.Шабат “НЕСКОЛЬКО ВЗГЛЯДОВ НА ЧИСЛА КАТАЛАНА” Ратмино, 07.7.18 / Москва, 08.11.20, URL:https://www.mccme.ru/nir/uir/Catalan.pdf
5. В. В. Доценко, “Числа Каталана и естественные отображения ” Москва Издательство МЦНМО2009 г. pp. 140-147. URL: https://istina.msu.ru/media/publications/article/034/df1/19193240/lktg-1.pdf
6. Бойко Банчев, числа Каталана,интернет ресурс, апрель 2016. URL:http://www.math.bas.bg/bantchev/misc/catalan.pdf
7. Богданов Андрей, числа Каталана, интернет ресурс,10 января 2013,URL:https://habr.com/ru/post/165295/
8. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика*. М.: Мир, pp. 287-296. 1998.
9. Sloane N. On-line encyclopedia of integer sequencesURL: www.research.att.com/njas/sequences
10. Стенли Р. *Перечислительнаякомбинаторика*. М.: Мир,pp.129-131. 1990
11. Студенческие чтения МК НМУ.*Под общей ред. В. Прасолова*. Вып. 2. М.: МЦНМО, pp. 139-146. 2001.
12. Conway, J. H., Guy R. K. *The book of numbers*. Copernicus, 1996, pp. 96-106.
13. Grimaldi R. P. *Fibonacci and Catalan numbers*: an introduction, John Wiley & Sons, pp. 15-158. 2012.
14. Roman S., *An introduction to Catalan numbers*, Birkhauser, pp. 40-54. 2015.
15. Stanley, R.P. Catalan Numbers; Cambridge University Press: New York, NY, USA, 2015.doi:10.1017/CBO9781139871495.