ҒТАМР 27.03.02

Dzh.T. Kayinbaev[1], A.E.Iliyas[2]
[1,2]Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan

«БҮТІН САНДАРДЫҢ БӨЛІНГІШТІГІ» НЕГІЗІНДЕ ШЕШІЛЕТІН КҮРДЕЛІ МӘТІНДІ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУ ТӘСІЛДЕРІ

Аңдатпа. Мақала, элементар математика мазмұнындағы маңызды мәселелердің бірі болып табылатын күрделі мәтінді есептерді «Бүтін сандардың бөлінгіштігі» негізінде шешу тәсілдеріне арналған. Жалпы, осы мазмұндағы күрделі мәтінді есептер негізінен теңсіздіктердің немесе теңсіздіктер жүйесінің көмегімен шешілетініне мақалады ерекше көңіл аударылады. Сол сияқты, мұндай мазмұндағы мәтінді есептердің, есеп талап етіп отырған жауабын анықтау да оңай шаруа емес. Мақалада, ол мәселе де талқыланған. Мақала, математиканы оқыту әдістемесі саласының мамандарына, мұғалімдерге, докторанттар мен магистранттарға және математикаға қызығушылық танытатын жоғары сыныптар оқушыларына арналған.
Түйін сөздер: есеп, күрделі есеп, мәтінді есеп, мәтінді есеп түрлері, сандар, бүтін сандар, натурал сандар, сандардың бөлінгіштігі, бүтін сандардың бөлінгіштік белгілері, қосындының бөлінгіштігі, айырманың бөлінгіштігі, көбейтіндінің бөлінгіштігі .

***

Annotation. The article is devoted to the methods of solving complex text problems on the basis of "Divisibility of integers", which is one of the most important problems in the content of elementary mathematics. In general, special attention is paid to the fact that complex textual problems of this content are solved mainly with the help of inequalities or systems of inequalities. Similarly, it is not easy to determine the answer to a textual report of this kind. This issue is also discussed in the article. The article is intended for specialists in the field of methods of teaching mathematics, teachers, doctoral students and undergraduates, as well as high school students interested in mathematics.
Keywords: problem, complex problem, text problem, types of text problem, numbers, integers, natural numbers, divisibility of numbers, signs of divisibility of integers, divisibility of sum, divisibility of difference, divisibility of multiplication

***

Аннотация. Статья посвящена методам решения сложных текстовых задач на основе «О делимости целых чисел», которая является одной из важнейших задач в содержании элементарной математики. В целом особое внимание уделяется тому, что сложные текстовые задачи такого содержания решаются в основном с помощью неравенств или систем неравенств. Точно так же нелегко определить ответ, требуемый таким текстовым отчетом. Этот вопрос также обсуждается в статье. Статья предназначена для специалистов в области методики обучения математике, преподавателей, докторантов и магистрантов, а также старшеклассников, интересующихся математикой.

Ключевые слова: задача, сложная задача, текстовая задача, виды текстовой задачи, числа, целые числа, натуральные числа, делимость чисел, признаки делимости целых чисел, делимость суммы, делимость разности, делимость умножения.

***

Математикалық мәселелердің ішіндегі ең көп зерттелген, әңгіме болған, талас тудырған мәселелердің бірі - ол мәтінді есеп. Оның да өзіндік үлкен себебі бар. Бір сөзбен айтқанда, ол себеп – математика ғылымының пайда болуына тікелей әсер еткен мәселе, ол адамдардың күнделікті өмірдегі туындаған ірілі, ұсақты мәселелерін шешуге деген талпынысы. Ал, бұл жағдайды математика тіліне аударсақ, ол мәтінді есепті шешу[1] деген сөз.

Жалпы мәтінді есеп пен оны шешу тәсілдері жайлы математиканы оқыту әдістемесімен айналысқан ғалымдардың барлығы да пікір білдірген, өз пайымдауларын келтірген. Қазақстан жағдайында ондай ғалымдардың қатарында Бидосов Ә, Дәулетқұлова А, Қосанов Б, Оспанов Т және басқалар болса, орыс тілді ғалымдардан бұл мәселеге қалам тартқандар Фридман Л.М, Пойа Д, Баженова Н.Г, Колягин. Ю. М, Лурье М. В, Саранцев Г. И, Демидоав Т. Е, Тонких А.П, Груденов. Я. И, Крупич В.И және басқалар болып табылады[1,2,5,6]. Атап айтқанда, Фридман Л. М, Пойа Д сияқты ғалымдар мәтінді есеп түрлерімен[1,2]. және олардың негізгі сипаттамаларымен айналысса, Груденов. Я. И мәтінді есепке қойылатын талап[6]. мәселелерімен шұғылданған және т.б.

Жалпы жоғарыда айтылған ғалымдардың еңбектерін сараптау барысындағы қорытындылардың бірі – ол математика мазмұнындағы мәтінді есептердің төрт түрлі функциясының болуы. Олар:

1.Оқытушылық, мәтінді есептерді шешу барысында оқушыларда математикалық білім, білік және дағды қалыптасады.

2.Тәрбиелік, мәтінді есептерді шешу барысында оқушылардың математикаға қызығушылығы артады, еңбек етуге дағдыланады.

3. Дамытушылық, мәтінді есептерді шешу барысында оқушылардың ойлау қабілеті дамиды, ақыл ой іс әрекетінің тәсілдерін меңгереді.
4.Бақылаушылық, мәтінді есептерді шешу барысында оқушылар өз білімдерінің деңгейін, өз дамуын, өз бетімен жұмыс жасау қабілетінің деңгейін білетін болады.

Қазіргі кезде немесе басқа сөздермен айтсақ постиндустриялы қоғамда осы функциялардың ішінен ең маңыздысы ДАМЫТУШЫЛЫҚ функция болып отырғаны белгілі. Біз ұсынып отырған, «Бүтін сандардың бөлінгіштігі» негізінде шешілетін күрделі мәтінді есептердің түрлері мен оларды шешу тәсілдері дәл осы математика мазмұндарындағы мәтінді есептердің дамытушылық функциясын іс жүзіне асыруға арналған десек қателеспейміз деп ойлаймыз. Себебі, мәтінді есептердің бұл түрін шешу барысында қолданылатын стандартты алгоритм немесе тәсіл жоқ. Бүтін сандардың бөлінгіштігіде әр есепте әр түрлі жағдайда қолданыс табады.

1. Факультетке мектеп оқушыларынан өндіріс жұмысшыларына қарағанда 600 өтінім артық түсті. Оқушылар арасында қыздар саны өндіріс жұмысшылары арасындағы қыздар санынан 5 есе көп, ал оқушылар арасындағы ұлдар саны өндіріс жұмысшылары ұлдар санынан n есе көп, $6 \leq n \leq 12$ (n – бүтін сан).
Егер өндіріс жұмысшылары арасында ұлдар қызларға қарағанда 20-ға көп болса, өтініштердің жалпы санын табыңыз.
Шешуі:
x-оқушылар саны, y-өндірушілер саны болсын. Онда,

$$\begin{cases} x = y + 600 \\ x_{ұ} = 5y_{қ} \\ x_{ұ} > y_{қ} \\ y = 20 + y_{қ} \\ 6 \leq n \leq 12 \end{cases}$$

теңдеуін аламыз.
Бұл теңдеуден оқушы ұл балалар, жұмысшы ұл балалардан n-есе көп екенін байқаймыз.

$$x_{ұ} = ny_{ұ}$$
$$620 - 3y_{қ} = (20 + y_{қ})n$$
$$620 - 20n = (n + 3)y_{қ}$$
$$y_{қ} = \frac{620 - 20n}{n + 3} = \frac{680}{n + 3} - 20$$

$\frac{680}{n+3}$- бөлшегінен бүтін сан шығыу керек.

$$6 \leq n \leq 12$$
$$6 + 3 \leq n + 3 \leq 12 + 3$$
$$n + 3 = 10$$
$$n = 7$$

680=2*2*2*2-17

$$y_{қ} = \frac{680}{7+3} - 20 = 48 \qquad y_{ұ} = 20 + 48 = 68$$

$$x_{ұ} = 620 - 3 * 48 = 476 \qquad x_{қ} = 5y_{қ} = 5 * 48 = 240$$

$y_{қ}+x_{ұ} + x_{қ} + y_{ұ} + y_{қ} = 476 + 240 + 48 + 68 = 832$
Барлығы 832 өтініш.

2. Парадқа тік төртбұрышты қалыпта, 24 сарбаздан тұратын рота келді. Кейіннен, парадқа барлық сарбаз қатыса алмайтындығы белгілі болды. Парадқа қалған құрамды келесідей орналастырды, қатарлар саны біріншімен салыстырғанда 2-ге кем, ал әр қатардағы жауынгерлер саны 26-ға артық. Егер парадқа барлық сарбаз қатыса алғанда, ротаны әр қатардығы сарбаздар саны қатар санына тең болатындай етіп орналастыруға болушы еді. Ротада қанша жауынгер болды.

Шешуі:

$$(n-2)(n-2+26) < 24n$$
$$(n-2)(n-24) < 24n$$
$$n^2 - 2n - 48 < 0$$
$$n_1 < 8$$
$$n_2 < -6$$

Шешіміндегі бүтін, оң аралықты аламыз.

$$1 \le n \le 7$$
$$24n = x^2$$
$$24 \cdot 6 = 144$$

Барлығы 144 солдат.

3. Кітапханадағы ғылыми кітаптар саны әдеби кітаптардың $\frac{11}{13}$ бөлігіне тең. Кітапхананы көшіру барысында кітаптарды екі вагонға тиеді. Бірінші вагонға ғылыми кітаптардың $\frac{1}{15}$ бөлігі және әдеби кітаптардың $\frac{18}{19}$ бөлігі тиелді. Ал екінші вагонға әдеби кітаптардың $\frac{1}{19}$ бөлігі және ғылыми кітаптардың $\frac{14}{15}$ бөлігі тиелді. Егер бірінші вагондағы жалпы кітап саны 10000-нан көп болса, ал екінші вагонда 10000 кітаптан аз кітап тиелген болса, әр кітап түрінен қанша кітаптан болғанын табыңыз.

Шешуі:
x −әдеби кітаптар саны,
y −ғылыми кітаптар саны болсын. Онда,

$$y = \frac{11}{13}x$$

$$\begin{cases}\frac{1}{15}y+\frac{18}{19}x>10000\\ \frac{14}{15}y+\frac{1}{19}x<10000\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\frac{11}{15*13}x+\frac{18}{19}x>10000\\ \frac{11*14}{13*15}x+\frac{1}{19}x<10000\end{cases}$$

x, y бүтін сандар (кітап саны)

Демек, x-15,12,19 сандарының еселігі

x-3705 еселігі болуы шарт

$$\frac{11}{195}x+\frac{18}{19}x>10000$$
$$\frac{3719}{3705}x>10000$$
$$x>9963$$
$$\frac{154}{195}x+\frac{1}{19}x<10000$$
$$\frac{3121}{3705}x<10000$$
$$x<11871$$
$$9963<x<11871$$

Осы аралықтағы 3705 еселігі 11115

$$x=11115$$
$$y=\frac{11}{13}11115=9405$$

11115 $-$әдеби кітаптар саны;
9405 $-$ғылыми кітаптар саны.

4. Бірінші қорапта қызыл шарлар, екінші қорапта көк шарлар бар. Қызыл шарлар саны көк шарлар санының $\frac{15}{19}$ бөлігіне тең. Қораптардан қызыл шарлардың $\frac{3}{7}$ -ін, ал көк шарлардың $\frac{2}{5}$-ін алып тастады. Сол кезде бірінші қорапта барлығы 1000-нан аз шар, екінші қорапта 1000-нан көп шар қалды. Бастапқыда әр қорапта қанша шардан болы?

Шешуі:
x-шарлар санының қандай да бір бөлігі болсын делік. x-еселі 7-ге және 5-ке болуы керек.
Бірінші қорапта $15x$ шар, екінші қорапта $19x$ шар бар.
x еселі 7*5 болғандықтан $x=15y$

$$1)\quad 15x*\frac{4}{7}<1000$$
$$15*35*\frac{4}{7}y<1000$$
$$300y<1000$$

$$y < 3\frac{1}{3}$$
$$y \leq 3$$
$$2) \quad 19x * \frac{3}{5} > 1000$$
$$19 * 35 * \frac{3}{5} > 1000$$
$$399y > 1000$$
$$y > 2\frac{202}{399}$$
$$y \geq 3$$

Бірінші қорапта $15x = 15 * 35 * 3 = 1575$;

Екінші қорапта $19x = 19 * 35 * 3 = 1995$.

5. m және n натурал сан және $\frac{m}{n}$ дұрыс қысқармайтын бөлшек. $\frac{3n-m}{5n+2m}$ бөлшегі қысқаратыны белгілі болса, қандай натурал сандарға қысқартуға болады.

Шешуі:

$\frac{m}{n}$ –дұрыс қысқармайтын бөлшек, $m < n$

ЕҮОБ(m, n)=1

$\frac{3n-m}{5n+2m}$-дұрыс қысқармайтын бөлшек болсын, онда

ЕҮОБ$(3n - 1, 5n + 2m) = k$ >1.

Олай болса бізде d және e натурал сандары бар.

$$3n - m = k * d$$
$$5n + 2m = k * e$$

ЕҮОБ(d, e)=1

$$\begin{cases} 3n - m = k * d \\ 5n + 2m = k * e \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} 15n - 5m = 5k * d \\ 15n + 6m = 3k * e \end{cases}$$
$$6m - (-5m) = 3ke - 5kd$$
$$11m = k(3e - 5d)$$
$$m = \frac{k(3e - 5d)}{11}$$
$$2) \begin{cases} 6n - 2m = 2kd \\ 5n + 2m = ke \end{cases} +$$
$$11n = 2kd + ke$$
$$11n = k(2d + e)$$
$$n = \frac{k(2d + e)}{11}$$

ЕҮОБ(m, n)=1 екені белгілі, m, n натурал сандар.

k үшін екі жағдай бар:

1) Егер k 11-ге бөлінетін натурал сан болса, онда $k = 11$ болатын m, n −натурал сандар;
2) Егер k 11-ге бөлінбесе, онда $2d + e$ және $3e - 5d$ 11-ге бөлінуі керек.
Барлық шартты ескерсек $k = 11$.
Жауабы: 11.

6. Талапкерлер үш күн бойы бірнеше аудиторияда тест тапсырды. Әр аудиторияда күн сайын емтихан тапсыратын үміткерлер саны аудитория санына тең болды. Егер емтихандар басқа корпуста өткізілсе, онда ораларды күн сайын бірдей аудиторияларды пайдалана отырып, екі күнде өткізуге болады, әр күні отырған аудиториядағы қатар саны мен студенттер саны бірдей етіп орналастырылады және қатардағы адамдар саны аудиториялар санына тең. Осы шарттар бойынша емтихан тапсыруға болатын үміткерлердің ең аз санын табыңыз.

Шешуі:
Бірінші және екінші корпустардағы аудиториялар сәйкесінше саны n және k болсын. Сонда Бірінші шартқа сәйкес мынандай теңдеу құруға болады:
$3 \cdot n^2 = 2 \cdot k^3$
Теңдіктің сол жағы 3-ке бөлінеді, демек оң жағы да бөлінуі керек. Себебі аудитория саны натурал сан. Сол секілді, теңдіктің оң жағы 2-ге бөлінгендіктен, сол жағы да 2-ге бөлінеді. Согда, $3 \cdot n^2 \vdots 2$, бұдан n^2 2-ге бөлінетіні шығады, демек ол 4-ке де бөлінеді. Сонда теңдіктің оң жағы да 4-ке бөлінеді, ондай жағдай тек $k \vdots 2$ болғанда орындалады. Осыдан $k = 6l, l \in N$. Табылған k-ның мәнін теңдікке апарып қойып, 3-ке қысқартсақ,
$n\ 2 = (12 \cdot l)\ 2$
теңдеуін аламыз. Сонда n қабылдайтын ең кіші мән $l = 1$ болғанда және ол 12-ге тең. Әрі қарай абитуриенттер санын тапсақ жеткілікті: $3 \cdot 122 = 432$.

7. Бақшадан жиналған қарбыздарды контейнерлерге бірдей етіп салды. Барлық контейнерлердің үштен бірі машинаға тиелген кезде, тиелген контейнерлер саны бір контейнердегі қарбыздар санына тең екені белгілі болды. Барлық жиналған қарбыздың бестен бірін дүкен бірнеше күнде сатты, күн сайын бірдей мөлшердегі қарбыз сатылды, бұл сатылған күндер санының квадратына тең. Ең аз жинауға болатын қарбыз саны қанша?

Шешуі:
x −контейнер саны, y −бір контейнердегі қарбыз саны, xy −жалпы қарбыз саны.
Бірінші шарт бойынша,

$$\frac{1}{3}x = y$$

$$x = 3y.$$

Екінші шар бойынша,

$\frac{1}{5}xy$ −қарбыз a күнде сатылды. Бір күнде $\frac{xy}{5a}$ қарбыз сатылды

$$\frac{xy}{5a} = a^2$$

$$xy = 5a^3$$

$$3yy = 5a^3$$

$$y^2 = \frac{5a^3}{3}$$

$$y = \sqrt{\frac{5a^3}{3}}$$

y −бір контейнердегі қарбыз саны болғандықтан, натурал сан болуы керек

$a = 15$ болған кезде орындалады.

$$y = \sqrt{\frac{5 * 15^3}{3}} = 75$$

$y = 75$ бір контейнердегі қарбыз саны, $x = 3y = 3 * 75 = 225$ − контейнер

$$x = 3y$$

$xy = 75 * 225 = 16875$ қарбыз кем дегенде жинауға болады.

Біз, ұсынып отырған мақалада, «бүтін сандардың бөлінгіштігі» негізінде шешілетін күрделі мәтінді есептерді теориялық және практикалық тұрғыдан талдауға күш салдық. Әрине, бір мақала көлемінде мұндай ауқымды мәселе өз шешімін толық тауып кетеді деген ойдан біз аулақпыз және де ол мүмкін еместе. Дейтұрғанмен, осы талдаудың өзі біраз қорытынды тұжырымдар жасауға негіз болып отыр.

1. Бүтін сандардың бөлінгіштігі негізінде шешілетін күрделі мәтінді есептерді шешу барысындағы оқушылардың қиналатын мәселелердің бірі олардың бөлінгіштікке байланысты теориялық материалдарды жетік меңгермеуінен деп тұжырымдауға болады.

2. Егер мәтінді есеп шартында немесе талабында, «кем емес», «артық емес», «ең аз мөлшерін» және т.б деген сияқты теңсіздікке қарата айтылатын сөз тіркестері болса онда мұндай мәтінді есеп негізінен бөлінгіштікке байланысты болып келеді.

3. Жалпы білім беретін орта мектеп математика мазмұнындағы бүтін сандардың бөлінгіштігі, сол сияқты қосынды мен айырманың, көбейтінді мен бөліндінің және т.б бөлінгіштік мәселелерді қарастырудың ауқымын кеңейту керек деп есептейміз.

Пайдаланған әдебиеттер тізімі

1 Қайынбаев Ж.Т. Жаттығу, есеп«Математика және Физика журналы» №3, 2017. 2-4 б.

2 2 Пойа Д. Математическое открытие Решение задач. Основные понятия, изучение и преподование. - М. Наука, 1970.-452 с.

3 Кулагин Е.Д. и др 3000 конкурсных задач по математике. – М., 2003. – 380 с.

4 Феоктистов, И.Е. Делимость чисел // Математика в школе - 2009. - № 8. – С. 47 – 58.

5 Ж.Т. Қайынбаев. Үш обьектінің қозғалысына байланысты күрделі мәтінді есептер.

6 SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods. 2020/2 (53).

7 Баженова Н.Г. Теория и методика решения текстовых задач: курсы по выбору для студентов специальности 050201 – Математика (Электронный ресурс): учеб.пособ/Н.Г.Баженова, И.Г.Одевцева. - 4-е изд., стер. - М.:Флинта, 2017. - 89 с.

8 Гусев В.А., Мордкович А. Г. Математика: Справ. материалы – М.: Просвещение, 1999. – 416 с.

9 Михелович, Ш.Х. Теория чисел / Ш.Х. Михелович. – Москва: Высшая школа, 1967. – 336 с.

10 Childs L. A. Concrete Introduction to Higher Algebra. Third Edition. - Springer, 2000. – PP. 3 – 6.

11 Волкова Т.С. Задачи элементарной теории чисел в содержании профессиональной подготовки современного учителя математики // Вестник ТГПУ - 2015. - № 7. – С. 85 – 88.

12 Волкова Т.С. Исследование умений будущих учителей математики решать задачи по элементарной теории чисел // Вестник КГУ им. Н.А. Некрасова - 2014. – Том 20. – С. 118 – 121.

13 Глухова О.Ю. Делимость чисел в элективных курсах // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук - 2015. - № 7-2. – С. 58 – 61.

14 Goodman F. Algebra. Abstract and Concrete. - Iowa City, IA, 2015. – PP. 25 –

15 Жафяров, А.Ж. Алгоритм и принципы изучения темы «Делимость целых чисел» на компетентной основе // Сибирский педагогический журнал - 2013. - № 5. – С. 134 – 143.

16 Harris A. Multiplication & Division. - 2001. – PP. 3 – 9.

17 Титаренко А.М. 6000 задач по математике от простейших до олимпиадных. – Ростов н/Д: Феникс, 2011. – 432 с.