ЖАРАТЫЛЫСТАНУ ЖӘНЕ ТЕХНИКАЛЫҚ ҒЫЛЫМДАР

NATURAL AND TECHNICAL SCIENCES

IRSTI 27.03.66

[1]В.В. Вербовский, А.Б. Даулетиярова[2], Б.К. Сартаев[2]
[1]Казахско-Британский технический университет, г. Алматы, Казахстан
[2]Университет имени Сулеймана Демиреля, г. Каскелен, Казахстан

ОБ ЭЛИМИНАЦИИ КВАНТОРОВ ДЛЯ УПОРЯДОЧЕННОГО МНОЖЕСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ С ВЫДЕЛЕННЫМ КАНТОРОВЫМ МНОЖЕСТВОМ

Аннотация. Элиминация кванторов является одним из важнейших инструментов в теории моделей. Действительно, если теория допускает элиминацию кванторов, то данная теория является полной, а описание всех формульных подмножество можно свести к описанию только тех подмножеств, которые определяются бескванторными формулами. Одной из важнейших математических структур является линейно упорядоченное множество вещественных чисел. На нем можно задать упорядоченную группу и поле. Известно, что элементарная теория данных структур допускает элиминацию кванторов, а поскольку эти теории являются вычислимо аксиоматизируемым, то элиминация кванторов влечет их разрешимость. В данной работе к порядку мы добавляем не операции, а выделяем на нем канторово подмножество и доказываем элиминацию кванторов для полученной структуры.

Ключевые слова: математическая логика, теория моделей, о-минимальность, дп-минимальность, упорядоченные структуры, элиминация кванторов.

***

Андатпа. Кванторларды жою – бұл модельдік теориядағы ең маңызды құралдардың бірі. Шындығында, егер теория кванторларды жоюға мүмкіндік берсе, онда бұл теория – толық, ал барлық формульді ішжиынжардың сипаттамасын кванторларсыз анықталған формулалармен келтіруге болады.

Ең маңызды математикалық құрылымдардың бірі – сызықты реттелген нақты сандар жиыны. Онда реттелген топ пен өрісті көрсетуге болады. Осы құрылымдардың қарапайым теориясы кванторлардың жойылуын рұқсат ететіні және осы теориялар аксиоматтандырылатындықтары белгілі болса, онда осы кванторларды жою олардың шешілетіндігін білдіреді. Бұл мақалада біз ретке операцияларды қоспаймыз, керісінше Кантордың ішкі жиынын бөліп алып, алынған құрылым үшін кванторларды жоюды дәлелдейміз.

Түйін сөздер: математикалық логика, модельдік теория, о-минимальді, дп-минимальді, реттелген құрылым, кванторларды жою.

***

Abstract. Quantifier elimination is one of the most important tools in model theory. Indeed, if a theory allows quantifier elimination, then this theory is complete, and the description of all definable subsets can be reduced to describing only those subsets that are defined by a quantifier-free formula. One of the most important mathematical structures is the linearly ordered set of real numbers. On it you can set an ordered group and field. It is known that the elementary theory of these structures admits quantifier elimination, and since these theories are computably axiomatizable, quantifier elimination implies their solvability. In this paper, we add not operations to the order, but select a Cantor subset on it and prove the elimination of quantifiers for the resulting structure.

Keywords: mathematical logic,model theory, o-minimality, dp-minimalitymordered structures, quantifier elimination.

В работе [1] начал исследовать дп-минимальные (dp-minimal) упорядоченные структуры, где доказал, что элементарная теория T структуры $(\mathbb{R}, <, P)$, где P выделяет канторово множество, является дп-минимальной. Для этого он доказал, что эта теория T допускает элиминацию кванторов. Однако его доказательство не совсем ясно, поэтому в данной работе мы приводим другое доказательство элиминации кванторов для данной теории.

Рассмотрим $(\mathbb{R}, <, P)$, где предикат P проинтерпретирован как Канторово множество. Если при построении Канторового множества мы выбросили интервал (a, b) и $x \in [a, b]$, то $l(x) = a$ и $r(x) = b$, если же $x \notin [0,1]$, то понимаем, что $l(x) = x$ и $r(x) = x$. Заметим, что эти функции формульны:

$$y = r(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x = y \wedge [x \leqslant 0 \vee x \geqslant 1]) \wedge (0 < x < 1 \wedge P(y) \wedge x \leqslant y \wedge \forall z(x < z < y \rightarrow \neg P(z))),$$

$$y = l(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x = y \wedge [x \leqslant 0 \vee x \geqslant 1]) \wedge (0 < x < 1 \wedge P(y) \wedge y \leqslant x \wedge \forall z(y < z < x \rightarrow \neg P(z))).$$

Теорема 1 *Элементарная теория структуры* $(\mathbb{R}, <, P, r, l, 0, 1)$ *допускаетэлиминацию кванторов.*

Доказательство. В силу критерия Тарского для доказательства теоремы достаточно элиминировать квантор существования в формуле вида $\exists x \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x,\bar{y})$, где $\varphi_i(x,\bar{y})$ одного из следующих типов:

1. $t(x) = t(y)$;
2. $t(x) \neq t(y)$;
3. $t(x) < t(y)$;
4. $t(x) \nless t(y)$;
5. $t(x) > t(y)$;
6. $t(x) \ngtr t(y)$;
7. $P(t(x))$;
8. $\neg P(t(x))$.

Заметим, что можно считать, что $\exists x \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x,\bar{y})$ не содержит формул вида (2), (4) и (6). Действительно, имеет место

$$t(x) \neq t(y) \Leftrightarrow t(x) < t(y) \vee t(y) < t(x)$$

тогда, если $\varphi_i(x,\bar{y})$ вида (2), то

$$\exists x(t(x) \neq t(y) \wedge \theta(x,z)) \Leftrightarrow \exists x((t(x) < t(y) \vee t(y) < t(x)) \wedge \theta(x,z)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists x(t(x) < t(y) \wedge \theta) \vee (t(y) < t(x) \wedge \theta) \Leftrightarrow \exists x(t(x) < t(y) \wedge \theta) \vee \exists x(t(y) < t(x) \wedge \theta).$$

Таким образом, мы можем можем избавиться от всех формул вида (2). Кроме того, имеют место эквивалентности

$$t(x) \nless t(y) \Leftrightarrow t(y) < t(x) \vee t(x) = t(y),$$

$$t(x) \ngtr t(y) \Leftrightarrow t(x) < t(y) \vee t(x) = t(y).$$

Значит, аналогичным образом, мы можем избавиться от формул вида (4) и (6).

Рассмотрим следующие виды атомарных формул полученных из формул вида (1), (3), (5), (7), (8), в которых мы раскрыли содержание понятия терм $t(x)$:

1. $x = t(y)$;
2. $x < t(y)$;
3. $x > t(y)$;
4. $l(x) < t(y)$;
5. $l(x) = t(y)$;
6. $l(x) > t(y)$;
7. $r(x) < t(y)$;
8. $r(x) = t(y)$;
9. $r(x) > t(y)$;
10. $P(x)$;
11. $\neg P(x)$.

Здесь, можно рассматривать только $P(x)$, а не$P(l(x)), P(r(x)), \neg P(l(x))$ и $\neg P(r(x))$, так как

$$P(l(x)) \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$P(r(x)) \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\neg P(l(x)) \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 1,$$

$$\neg P(r(x)) \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 1.$$

Если одна из$\varphi_i(x,\bar{y})$вида $x = t(y)$, то $\exists x \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x,\bar{y})$ эквивалентна формуле $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(t(y),\bar{y})$, точнее, пусть

$$\varphi_j(x,\bar{y}) := x = t(y),$$

тогда

$$\exists x \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x,\bar{y}) \Leftrightarrow \bigwedge_{i \neq j} \varphi_i(t(y),\bar{y}).$$

Таким образом, можно считать, что $\exists x \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x,\bar{y})$ не содержит формул вида (1).

Из определения функций l и r легко вывести следующие эквивалентности, заметим, что

$$l(l(x)) = l(x), \quad r(r(x)) = r(x), \quad l(r(x)) = l(x), \quad r(l(x)) = l(x).$$

Левая граница переменной x меньше или больше t, то соответственно $x < t$ или $x > t$, а если x не попадает в Канторово множество, то соответственно $x < t$, либо его левая граница совпадает с левой границей t или переменная x больше правой границы t. Рассмотрим формул вида (4), (6):

$$l(x) < t \Leftrightarrow [(x \leqslant 0 \vee x \geqslant 1 \vee P(x)) \wedge x < t] \vee$$
$$\vee [0 < x < 1 \wedge \neg P(x) \wedge (x < t \vee (l(x) = l(t) \wedge l(t) < t))];$$

$$l(x) > t \Leftrightarrow [(x \leqslant 0 \vee x \geqslant 1 \vee P(x)) \wedge x > t] \vee [0 < x < 1 \wedge \neg P(x) \wedge x > r(t)].$$

Правая граница переменной x меньше или больше t, то соответственно $x < t$ или $x > t$, а если x не попадает в Канторово множество, то соответственно переменная x меньше левой границы t или $x > t$, либо его правая граница совпадает с правой границей t. Рассмотрим формул вида (7), (9):

$$r(x) < t \Leftrightarrow [(x \leqslant 0 \vee x \geqslant 1 \vee P(x)) \wedge x < t] \vee [0 < x < 1 \wedge \neg P(x) \wedge x < l(t)];$$

$$r(x) > t \Leftrightarrow [(x \leqslant 0 \vee x \geqslant 1 \vee P(x)) \wedge x > t] \vee$$
$$\vee [0 < x < 1 \wedge \neg P(x) \wedge (x > t \vee (r(x) = r(t) \wedge t < r(t)))].$$

Поэтому, можно считать, что нет формул вида (4), (6), (7) и (9). Остались следующие случаи: (2), (3), (5), (8), (10), (11).
Формулу$\varphi_i(x,\bar{y})$можно считать формулой в дизъюнктивной нормальной форме. Напомним, это означает, что$\varphi_i(x,\bar{y})$представляет собой дизъюнкцию конъюнкций, а каждая конъюнкция соединяет несколько литералов.

$$\exists x \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x,\bar{y}) \right) \Leftrightarrow \exists x \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x,\bar{y}) \right) \wedge (x \in [0,1] \vee x \notin [0,1]) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists x \left[\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x,\bar{y}) \wedge x \in [0,1] \right) \vee \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x,\bar{y}) \wedge x \notin [0,1] \right) \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists x \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x,\bar{y}) \wedge x \in [0,1] \right) \vee \exists x \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x,\bar{y}) \wedge x \notin [0,1] \right).$$

В формуле $\exists x(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x,\bar{y}) \wedge x \notin [0,1])$ имеем, что $l(x) = x$, $r(x) = x$, и фомула P ложна. Значит достаточно рассмотреть φ_i вида

$x < t, x > t, x = t.$ Элиминируем квантор существования как для теории плотного линейного порядка.
Рассмотрим формулу

$$\exists x\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x,\bar{y}) \wedge 0 \leqslant x \leqslant 1\right),$$

если есть формула $x < t_2$ и $x > t_1$, то

$$\exists x\left(t_1 < x < t_2 \wedge 0 \leqslant x \leqslant 1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x,\bar{y})\right).$$

Пусть одно изφ_i — $P(x)$. Тогда $l(x) = x$ и $r(x) = x$ и рассматриваем φ_i вида $x < t$, $x > t$ и $x = t$, значит переменная x встречается лишь в неравенствах. Другими словами, нас спрашивают, найдётся ли значение x, большее каких-то переменных и меньшее каких-то других.

$$\exists x(t_1 < x < t_2 \wedge x = t_3 \wedge P(x)) \Leftrightarrow t_1 < t_3 < t_2 \wedge P(t_3),$$

$$\exists x(t_1 < x < t_2 \wedge P(x)) \Leftrightarrow t_1 < t_2 \wedge [t_1 < l(t_2) \vee r(t_1) < t_2],$$

$$\exists x(t_1 < x \wedge P(x)) \Leftrightarrow t_1 < 1,$$

$$\exists x(x < t_2 \wedge P(x)) \Leftrightarrow t_2 > 0.$$

Рассмотрим только формулу вида $P(x)$, тогда

$$\exists x P(x) \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Пусть одно из φ_i будет$\neg P(x)$. Рассмотрим теперь формулу, где также присутсвуюти формулы $x < t_2$, $x > t_1$, то есть

$$\exists x\left(t_1 < x < t_2 \wedge 0 \leqslant x \leqslant 1 \wedge \neg P(x) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x,\bar{y})\right).$$

Так же как и раньше, мы можем предположить, что есть ровно одно неравенство вида $t < x$ и ровно одно неравенство вида $x < t$. Поэтому, можно сказать, что x не попадает в Канторово множество. Заметим следующие равносильности формул.
Случай, когда формула утверждает, что элемент *x*лежит в интервале, но не лежит в канторовом множестве, ближайшая слева к нему точка из канторово множества совпадает с t_3, а ближайшая справа к нему точка изканторово множества совпадает с t_4, рассматривается следующитм образом:

$$\exists x(t_1 < x < t_2 \wedge \neg P(x) \wedge l(x) = t_3 \wedge r(x) = t_4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t_3 < t_4 \wedge l(t_4) = t_3 \wedge t_1 < t_4 \wedge t_2 > t_3 \wedge t_1 < t_2.$$

Случай, когда формула утверждает, что элемент xлежит в интервале, но не лежит в канторовом множестве, а ближайшая слева к нему точка изканторово множества совпадает с t_3 рассматривается следующитм образом:

$$\exists x(t_1 < x < t_2 \wedge \neg P(x) \wedge l(x) = t_3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists x(t_1 < x < t_2 \wedge \neg P(x) \wedge l(x) = t_3 \wedge r(x) = r(t_3)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t_3 < r(t_3) \wedge l(r(t_3)) = t_3 \wedge t_1 < r(t_3) \wedge t_2 > t_3 \wedge t_1 < t_2,$$

Случай, когда формула утверждает, что элемент xлежит в интервале, но не лежит в канторовом множестве, а ближайшая справа к нему точка изканторово множества совпадает с t_4 рассматривается следующитм образом:

$$\exists x(t_1 < x < t_2 \wedge \neg P(x) \wedge r(x) = t_4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists x(t_1 < x < t_2 \wedge \neg P(x) \wedge r(x) = t_4 \wedge l(x) = l(t_4)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow l(t_4) < t_4 \wedge r(l(t_4)) = t_4 \wedge t_1 < t_4 \wedge t_2 > l(t_4) \wedge t_1 < t_2.$$

Осталось рассмотреть случай, когда формула утверждает, что элемент xлежит в интервале, но не лежит в канторовом множестве:

$$\exists x(t_1 < x < t_2 \wedge \neg P(x)) \Leftrightarrow t_1 < t_2.$$

Во всех случаях мы сократили квантор существования элемента x. Теорема доказана.

Таким образом, элиминация кванторов устанавливает разрешимость элементарной теории структур канторовых множеств с отношением равенства, границ и порядка.

Данная теорема была доказана В. Вербовским и А. Даулетияровой самостоятельно, но в последствии Б. Сартаев сделал несколько упрощений в доказательстве, благодаря чему оно стало более легко читаемым.

Данная работа была сделана в рамках проекта AP05132688 «Относительная стабильность».

Список литературы:

1 Goodrick, J. A monotonicity theorem for dp-minimal densely ordered groups. *Journal of Symbolic Logic,* 75 (2010), no. 1, 221–238.