СҮЛЕЙМЕН ДЕМИРЕЛ УНИВЕРСИТЕТІ
ИНЖЕНЕР ФАКУЛЬТЕТІ
«МАТЕМАТИКА ЖӘНЕ ЖАРАТЫЛЫСТАНУ
ҒЫЛЫМДАРЫ» КАФЕДРАСЫ

ЖАЛПЫЛАНҒАН ҮЗІЛІЛІССІЗДІК МОДУЛІМЕН ФУНКЦИЯЛАР КЛАСЫНДА ИНТЕГРАЛДЫ ЖУЫҚТАУ

КУРСТЫҚ ЖҰМЫС
6М060100-Математика

Магистрант _______________ Намаджанова Муяссар
Ғылыми жетекші_______________к.ф-м.н,доцент Кудайбергенов С.С

Алматы-2013ж

Андатпа

Бұл курстық жұмыс $W_{\varphi}^{r,k}(D)$ класындағы,Чебышев системасы бойынша интегралды жуықтау есебі қарастырылған.Квадратуралық формуланың қалдығы Фурье-Чебышев қатары арқылы өрнектеледі.Үзіліліссіздік модулі,Чебышевтың бірінші ретті көпмүшелігі,салмақпен интегралданатын функциялар кеңістігінің анықтамалары қолданылған.Квадратуралық формуланың қателігінің бағалауы дәрежелік шкалада алынған.Теориялық маңызы бар жұмыс.

Abstract

This work is dedicated to the study class of $W_{\varphi}^{r,k}(D)$ of the system Chebyshev on approximation of the integral.The remainder of the quadrature formula is expressed in terms of the Fourier-Chebyshev series.Used definition of the modulus continuity,the Chebyshev polynomials and integration with weight. The errors of quadrature formula power scale estimated.The work is theoretical in nature.

МАЗМҰМЫ

КІРІСПЕ

XX ғасырдың ортасында практикалық есептердің шешімдерін сан түрінде аз уақытта есептейтін электронды есептеу машиналарының пайда болуы, математиканың дамуына серпін берді және жаңа мәселелер пайда болды.

Әртүрлі тәжірибелер жүргізген кезде (физикалық, химиялық, техникалық және т.б.) мына екі фактор маңызды рөлге ие – қай жерге датчиктерді орналастыру (қайсы нүктелерде мәлімет алу) және алынған мәліметтерді пайдаланып бүкіл процесті қалай сипаттауға болады (интерполяциялық формуланы құру).

Әдетте қандай да процесті зерттегенде датчиктерді орналастырып, алынған мәліметтерге қарап интерполяциялық полином құрылады. Бірақ көпайнымалы жағдайда жуықтайтын функцияны құру қиындай түседі. Себебі ізделінді функцияның өзгергіштігі бірнеше факторларға тәуелді болады.

Шынайы құбылыстарды математикалық әдіспен зерттеу мына схема бойынша жүргізіледі: іс- тәжірибе жүргізу арқылы бақылап математикалық моделін құру, әрі қарай математикалық шараларды қолдана отырып қорытынды нәтижені нақты дәлелдермен салыстыру.

Қолданбалы есептерге математикалық әдісті қолдану XX ғасырдың ортасындағы аз уақыт ішінде тиімді шешім алуға мүмкіндігі бар электрондық есептеуіш машинаның (компьютер) пайда болуы үлкен ынталандыру туғызды.

Алайда компьютер тек қана үлкен ақырлы сандар массивін (көлемі разряды компьютердің техникалық характеристикасына байланысты шектеледі) және олармен төрт арифметикалық, қарапайым логикалық амалдарды қолдануға мүмкіндік береді.

Сондай-ақ, компьютер арқылы тек қана ақырлы терілген сандармен ақырлы рет арифметикалық амалдарды қолдану арқылы және өлшемі бойынша салыстыру арқылы математикалық моделін зерттеуге болады.

Әрине, зерттеуге тиісті бастапқы және негізгі математикалық модель математикалық талдаудың, жалпы мағынада түсінуімізше «бүкіл дерлік математика», негізгі объектісі болып табылады. Нақтырақ айтсақ, функциялар, туынды, интеграл, теңдеудің дербес туындылы шешімі, және т.б.

Алгоритмді есептеуді жүзеге асыруда артық дәлдік арифметикалық амалдардың санының тым көбейіп кетуі мен жадының көлемінің тиімсіз көбейіп кетуіне әкеліп соқтырады.

Сонымен, біз мынадай мәселені қарастырамыз, қандай да бір функцияның дәл емес ақырлы мәліметін пайдаланып, сол функцияның интегралына жуықтайтын математикалық аппарат құру. Бұл мәселе математикада «интегралды жуықтау» деген атпен белгілі.

1957 жылы Н.М. Коробов теоретико-сандық әдіспен квадратуралық формула құрды. Оның Монте-Карло әдісінен артықшылығы оның қателігі кездейсоқ шама емес болды.

Кейіннен бұл мәселені көптеген математиктер дамытты: В.И. Темляков, В.А. Быковский, Н.С. Бахвалов, К.К. Фролов, В.В. Дубинин, И.Ф. Шарыгин, С.М. Никольский, С.Л. Соболев, С.А. Смоляк, С.Н. Кудрявцев, қазақстандық математиктерден: И.А. Акбергенов, А.А.Женсыкбаев, Н. Темірғалиев т.б.

1 ИНТЕГРАЛДЫ ЖУЫҚТАУ ЕСЕБІНІҢ ҚОЙЫЛУЫ

1.1 Есептің қойылуы

N және s ($N, s=1,2,\ldots$) натурал сандары берілсін., $\Omega=\Omega_s=[0,1]^s$, $a=(a_1,\ldots a_N)\in R^N, t_k\in\Omega_s (k=1,\ldots N), t=(t_1,\ldots t_N)$ және мынадай белгілеулер енгізейік:

$$\delta_N(F;t,a)\equiv\sup_{f\in F}\left|\int_{[0,1]^s} f(x)dx-\sum_{k=1}^{N}a_k f(t_k)\right|, \tag{1}$$

$$\delta_N(F)=\inf_{a,t}\delta_N(F;a,t). \tag{2}$$

Мұнда интеграл Риман мағынасында қолданылуда, ал

$$\Lambda(f;t,a)\equiv\sum_{k=1}^{N}a_k f(t_k) \tag{3}$$

ақырлы қосындысы *квадратуралық формула* деп аталып, a және t – сәйкесінше оның *жүктемесі (вес) мен түйіндері*; F –белгілі бір шарттарды қанағаттандыратын $[0,1]^s$ анықталған функциялар жиыны.

(1-2)-дегі $\int_\Omega f(x)dx$, интегралы $\Omega=[0,1]^s$ анықталған $f(x)$ функциясына тәуелді, (1-2)-дегі $\int_\Omega f(x)dx$, интегарлы (3) ақырлы қосындысымен жуықталады.

$f(t_1),\ldots,f(t_N)$ мәліметтерін (3)-тен өзгеше түрде пайдалануға болады.

$$\Lambda(f;t,\varphi_N)=\varphi_N(f(t_1),\ldots,f(t_N)), \tag{4}$$

мұндағы $\varphi_N(\tau_1,\ldots,\tau_N)$ - нақты мәнді, N айнымалы, $\varphi_N(0,\ldots,0)=0$ болатын функция. (3)-т егі $\Lambda(f;t,a)$ орнына $\Lambda(f;t,\varphi_N)$ -ді апарып қойсақ:

$$\delta_N(F;\varphi_N,t)=\sup_{f\in F}\left|\int_{[0,1]^s} f(x)dx-\varphi_N(f(t_1),\ldots,f(t_N))\right|, \tag{5}$$

$$\delta_N(F)=\inf_t\inf_{\varphi_N}\delta_N(F;\varphi_N,t). \tag{6}$$

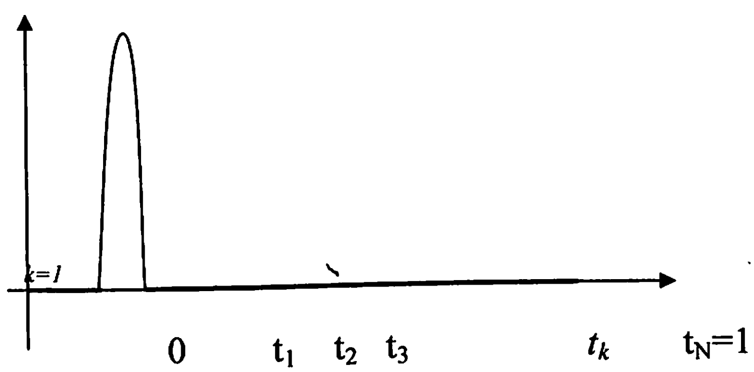
Көрініп тұрғандай, (3) –формуласы (4)-тің дербес түрі. φ_N дегеніміз $\varphi_N(\tau_1,\ldots,\tau_N)=\sum_{k=1}^{N}a_k\tau_k$ сызықты функция. (5-6) қателігінің оптимальді бағалануы қызығушылық туғызады, (1-2) есебінің де өзіндік ерекшеліктері бар.

Енді (1-2) есебіндегі F-функциялар жиынына тоқталайық. Бұл жиында $f(t_k)$ өрнегінің мағынасы болатындай функциялардан тұруы керек, мысалы үзіліссіздік қасиеті болу немесе басқа да шарттар болуы мүмкін. (мыс., қара., [1, с.161-168]).

$C[0,1]^s$ жиынында, яғни [0,1]-де үзіліссіз функциялар жиынында (2) өрнегі $+\infty$-ке тең. Шынында да ке келген $\varepsilon>0$ саны үшін кез келген а жүктемесі мен t түйіндері үшін:

$$|\int f_\varepsilon(x)dx - \sum a_k f_\varepsilon(t_k)| = |\int f_\varepsilon(x)dx - \varphi_N(f_\varepsilon(t_1), \ldots, f_\varepsilon(t_N))| = \int f_\varepsilon(x)dx > \varepsilon.$$

$f_\varepsilon(x)$ функциясын құруға болады.



1-сурет.

Мұндай мысалға 1-суретіндегі функция болады, (3) өрнегі нөлге тең болып, ал интегралдың мәнін яғни штрихталған фигураның ауданын қалауымызша үлкен етіп алуға болады.

Мұның себебі алынып отырған түйіндердегі функцияның мәні нөлге тең, $f(t_1)=f(t_2)=0$ болып, $[t_1,t_2]$ сегментіндегі $f(x)$ функциясының өзгеруіне ешқандай әсері болмайды, ал мұнда фукнция өте тез өзгеруі мүмкін, сәйкесінше біртегістікті (гладкость) аз береді.

Бұл мысалдан (3) формуласындағы $f(t_k)$ мәніне a_k коэффициенттерін көбейткенде $f(x)$ функциясының t_k маңайындағы өзгергіштігіне әсері болуы керек. Басқа сөзбен айтқанда (1-2) есебінде белгілі мағынада тегістік (гладкость) болуы керек, яғни осы шартар негізінде F функциялар жиыны анықталады.

1.2 Функциялар класы

Белгілі бір қасиеттер немес шектеулер арқылы барлық функциялар жиынынан бөлініп алынады. Фурье коэффициенттерінің кему жылдамдығына байланысты мынадай кластарды көрсетуге болады:

1) Соболев класы $SW_q^r(0,1)^s$ ($r>0$, $1\le q\le\infty$) келесі түрде бейнеленетін ($y=(y_1,\dots,y_s)$) барлық $f(x)$ периодты функциялар жиыны

$$f(x)=(\varphi * F_r)(x)=\int_{[0,1]^s}\varphi(x+y)2^s\sum_{k_j>0,k_j\in Z\ (j=1,2,\dots,s)}(2\pi k_j)^{-r}\cos 2\pi(k_jy_j-r/4)dy,$$

мұндағы $\|\varphi\|_{L^q(0,1)^s}\le 1$.

2) Никольский класы деп $SH_q^r(0,1)^s(r>0,1\le q\le\infty)$ әр айнымалысы бойынша 1- периодты барлық $f(x)\in L^q(0,1)^s$ және қандай да бір l>r үшін келесі қатынас орындалатындай

$$\left\|\Delta_{h_1}^l\dots\Delta_{h_s}^l f(x_1,\dots,x_s)\right\|_{L^q(0,1)^s}\le\prod_{j=1}^s|h_j|^r,$$

мұндағы $\Delta_{h_j}f\equiv\Delta_{h_j}^1 f=f(x_1,\dots,x_{j-1},x_j+h_j,x_{j+1},\dots,x_s)-f(x_1,\dots,x_s),\Delta_{h_j}^k=\Delta_{h_j}(\Delta_{h_j}^{k-1})$ функциялар жиынын айтамыз

3) s- бүтін теріс емес сан және r>0 сан болсын. Никольский класы $H_2^r(0;1)^s$ дегеніміз әр айнымалысы бойынша 1 периодты түрде қосылатын және келесі шартты қанағаттандыратын функциялар жиыны

$$\sup_{k=0,1,2,\dots}2^{kr}\left\|\sum_{[2^{k-1}]<\|m\|\le 2^k}\hat f(m)e^{2\pi i(m,\cdot)}\right\|_{L^2(0,1)^s}\le 1$$

мұндағы $\hat f(m)=\int_{(0;1)^s}f(y)e^{-2\pi i(m,y)}dy\quad(m\in Z^s)$ - $f(x),\|m\|=\max_{j=1,\dots,s}|m|$, Фурье-Лебегтің тригонометрикалық коэффициенттері [...]-санның бүтін бөлігі.

4) Коробов класы $E_s^r(r>1,\ s=1,2,\dots)$ әр айнымалысы бойынша 1-периодты және Фурье коэффициенттері келесі шартты қанағаттандыратын барлық $f(x)=f(x_1,\dots,x_s)$, функцияларынан тұратын жиынды айтамыз.

$$\left|\hat{f}(m)\right| = \left(\prod_{j=1}^{s} \max(1, |m_j|)\right)^{-r}$$

Есептің шешуі $(\varepsilon > 0)$

$$E_\varepsilon = \left\{ m \in Z^s : \sup_{f \in E_s^r} \left|\hat{f}(m)\right| \geq \varepsilon \right\} = \left\{ m \in Z^s : \left(\prod_{j=1}^{s} \max(1, |m_j|)\right) \leq \varepsilon^{-\frac{1}{r}} \right\}$$

гиперболалық крест деп аталатын маңызды ұғымға әкеледі (R>0) -

$$\Gamma_R = \left\{ m \in Z^s : \prod_{j=1}^{s} \max(1, |m_j|) \leq R \right\}.$$

Анализде маңызды рөл атқаратын накты функционалдық кластар туралы теориялық материал Х. Трибел [2] монографиясында жазылған.

Алдағы уақытта қолданылатын кейбір белгілеулерді көрсетіп өтейік. $c(...)$-арқылы оң шаманы белгілейміз, және ол жақша ішіндегі параметрлерге тәуелді болады. А мен В оң болғанда $B=O_{\alpha,\beta,...}(A)$ немесе $B \underset{\alpha,\beta,...}{<<} A$ дегеніміз $|B| \leq c(\alpha,\beta,...)A$ мағына береді. Оң таңбалы А және В-лар үшін $A \underset{\alpha,\beta,...}{\asymp} B$ жазуы

$A \underset{\alpha,\beta,...}{<<} B \underset{\alpha,\beta,...}{<<} A$ деп түсініледі.

Көп айнымалы жағдай теориялық жағынан күрделі бірақ практикалық есептерде көп қолданылады. Жоғарыда айтып өткендей кейбір жағдайларда ғана (2) өрнегі дәл табылған. (2) өрнегін дәл табу күрделі мәселе болғандықтан, сол есеп жоғарыдан бағалау және төменнен бағалау болып екіге бөліп қарастырылады. Яғни

$$\psi_1(N;F) << \delta_N(F) << \psi_2(N;F)$$

Егер ψ_1, Ψ_2 функциялары дәл беттессе, F класында есептің оптимальді шешімі табылған болады.

1) *Төменнен бағалау* – дегеніміз кез келген $a = (a_1, ..., a_N)$ жүктемесі мен $t=(t_1, ..., t_N)$ түйіндері үшін

тек функциялар класына ғана тәуелді $c_1(F)$>0 саны мен $f_{a,t} \in F$ функциясы табылып,

$$\left|\int_{\Omega} f_{a,t}(x)dx - \sum_{k=1}^{N} a_k f_{a,t}(t_k)\right| \geq c_1(F)\psi_1(N, F),$$

қатынасы орындалса.

2) *Жоғарыдан бағалау* – дегеніміз $c_2(F)>0$ саны мен кез келген N(N=1,2,...) саны үшін ($a_1^0,...,a_N^0$) жүктемесі мен ($t_1^0,...,t_N^0$) түйіндері табылып, кез келген $f \in F$ үшін

$$\sup_{f \in F}\left|\int_{\Omega} f(x)dx - \sum_{k=1}^{N} a_k^0 f(t_k^0)\right| \leq c_2(F)\psi_2(N, F).$$

қатынасы орындалса.

Әртүрлі облыста қолданылатын болғандықтан түйінге (сетка) қосымша талаптар қойылады:

1. Түйіннің берілуі қарапайым болуы,
2. Түйінді құру алгоритмінің қарапайым болуы,
3. Қателіктің оптимальді шешімінің қателігіне барынша жақын болуы.

$$\xi_k(a) = \left(\left\{\tfrac{k}{N}a_1\right\},...,\left\{\tfrac{k}{N}a_s\right\}\right)(k = 1,...,N) \qquad (7)$$

түріндегі ({...} – бөлшек бөлігі) түйін теориялық көп зерттелген және практикалық жағынан қолданылуы аз емес, мұндағы $a_1 = a_1(N),..., a_s = a_s(N)$ сандары N мен өзара жай бүтін сандар. Оларды оптимальді коэффициенттер деп атайды.

(7) түріндегі сетка жоғарыдағы талаптарға жауап береді, яғни бүтін (s+1) - өлшемді ($N, a_1,..., a_s$) векторы арқылы қарапайым түрде беріледі, ЭЕМ-нің жадында тез сақталады және $\asymp$ N арифметикалық амал арқылы оңай жазылады. Көптеген алынған нәтижелер: «Егер ($N, a_1,..., a_s$) сандары табылса, онда...» деген қосымша шарттар арқылы келген. Сондықтан да бұл тақырыпта оптимальді коэффициенттерді табу негізгі мәселе болып табылады.

1959 жылдан бастап Н.М. Коробов оптимальді коэффициенттер табудың бірнеше алгоритмдерін ұсынды. Кейінірек 1962 жылы (7) түріндегі түйін Э. Хлавко арқылы қайта ашылды, дивизорларды қолдану кезінде де осы түйінге оралды ([13, 38-40]).

(7) түйіні $[0,1]^s$ –да бірқалыпты орналасса, $a_1(N),\dots, a_s(N)$ бүтін сандарын N модулі бойынша *оптимальді коэффициентер, ал сетканың өзін паралелепипедті теория-сандық сетка* деп атайды.

3 п. талаптардың (1.1.7) түйініне орындалатыны туралы көптеген публикацияларда қарастырылған.

1988 жылы Вань Юаньның шолуында былай жазылған:

«Сандық интегралдың мәселесінде негізгі проблема оптимальді коэффициенттерді тікелей табу болып қалуда»

Алгебралық сандардың өрісі теориясының негізгі екі фундаментальді проблемасын қарастыру барысында бұл есепті Н. Темірғалиев толық шешіді деуге де болады.

Қазіргі уақытта оптимальді болатын квалратуралық формулалар бір айнымалы және бірнеше клас үшін ғана шешілген және олардың қоданылу аясы тар; бірақ бұл мәселемен айналысудың қажеті жоқ дегенді білдірмейді ” ([4, с.126]).

2 ҚАЖЕТТІ АНЫҚТАМАЛАР ЖӘНЕ ЛЕММАЛАР

2.1 Чебышев системасы

Бірінші ретті Чебышев көпмүшеліктер (T_n арқылы белгілінеді) және екінші ретті Чебышев көпмүшеліктер (U_n арқылы белгілінеді) келесі формулалар бойынша анықталады

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x \tag{1.2}$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), n = 2,3,... \tag{1.3}$$

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x \tag{1.4}$$

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), n = 2,3,... \tag{1.5}$$

(1.3) және (1.5) рекуррентті формулалар бір-бірімен пара-пар екенін көреміз, ал 1-ші және 2-ші текті көпмүшеліктердің арасында айырмашылығы тек (1.2) және (1.4) быстапқы шарттарына байланысты.

(1.2)-(1.5) формулалардан келесі теңдіктер шығады

$$\begin{aligned}
&T_0(x) = 1\\
&T_1(x) = x\\
&T_2(x) = 2x^2 - 1\\
&T_3(x) = 4x^3 - 3x\\
&T_4(x) = 8x^4 - 8x^3 + 1\\
&T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x\\
&T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
&U_0(x) = 1,\\
&U_1(x) = 2x\\
&U_2(x) = 4x^2 - 1\\
&U_3(x) = 8x^3 - 4x\\
&U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1\\
&U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x\\
&U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Бұл формулалардан T_n және U_n x^n мүшесінің коэффициенті $2^{n-1}(n \geq 1)$ немесе $2^n(n \geq 0)$ тең n дәрежелі көпмүшелік болатындығын шығады.

Жазуды ықшамдау үшін Чебышев көпмүшеліктердің қасиеттері және қолдануын зерттеу алдынан олардың анықтамасы бүтін теріс емес n сандарына таратайық. Теріс индексі бар Чебышев көпмүшеліктері мына түрде берілген

$$T_{n-2}(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_n(x), n = 1,0,-1,...$$
$$U_{n-2}(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_n(x), n = 1,0,-1,... \quad (1.9)$$

(1.2) және (1.4) бастапқы шарттар бойынша анықталады деп ұйғарайық.

Теріс индексі бар Чебышев көпмүшеліктер және оң индексі бар Чебышев көпмүшеліктер арасындағы байланысы өте қарапайым болады.

Теорема. Кез келген бүтін n саны үшін келесі формулалар орынды.

$$T_n = T_{-n} \quad \mathbf{(1.10)}$$

$$U_n = -U_{-(n+2)} \quad \mathbf{(1.11)}$$

Чебышев көпмүшеліктері бірнеше айқын түрлерде жазуға болады. Олардың бірі тригонометриялық және оларға кері функциялар пайдаланғандықтан исскуственный болып көрінеді, бірақ ең көп пайдаланылады. Егер тек нақты облысын қарастырсақ, онда Чебышев көпмүшеліктерінің бұл түрі барлық x үшін орынды емес, x-ке қосымша талаптарды қою керек.

Теорема 1.2 Егер $|x| \le 1$, онда $T_n(x) = \cos(n \arccos x), n = 0, \pm 1,...$ (1.12)

Дәлелдеуі. Бұл теоремада берілген формулалар (1.2) және (1.3) немесе (1.4),(1.5) формулаларымен пара-пар екендігін дәлелдеу жеткілікті. 1-ші текті көпмүшеліктер үшін

$$\cos(0 \arccos x) = \cos 0 = 1 = T_0(x)$$
$$\cos(1 \arccos x) = x = T_1(x)$$

шығады

Функционалдырдың тензорлық көбейтінділерінің әдісінде Чебышев системасын қолдануды Н. Темірғалиев, С.Құдайбергенов қарастырған. С.Құдайбергенов, Д.Исаходжаев, С.Сабитова белгілі бір класта Чебышев системасы арқылы сандық интегралдау есептерді зерттелген. Келесі теоремалар алынған;

Теорема 1. $r > 1$ үшін келесі қатынасы орынды

$$\sup_{f \in U_s^{Tc}(-\vec{r},\vec{1},\vec{1},\vec{1})} \left| \int_{[-1,1]^s} f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \Lambda_q(f) \right| \succ\prec \frac{\ln N^{(r+1)(s-1)}}{N^r}.$$

Теорема 2. Егер $\tau > 1$ болса, онда

$$\sup_{f\in U_s^{Tc}(-\vec{1},\vec{1},\vec{1},\log^{-\tau}{}_2(\cdot))}\left|\int_{[-1,1]^s} f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\Lambda_q(f)\right| \succ\prec \begin{cases}\dfrac{(\ln N)^{(3-\tau)s-2}}{N}, & \text{при } 1\le\tau<2\\ \dfrac{(\ln N)^{s-2}(\ln\ln N)^{s-1}}{N}, & \text{при } \tau=2\\ \dfrac{(\ln N)^{s-\tau}}{N}, & \text{при } \tau>2\end{cases}$$

Теорема 3: $r>1,\tau<1$

$$\sup_{f\in U_s^{Tc}(-\vec{r},\vec{1},\vec{1},log_2^{-\tau}(\cdot))}\left|\int_{[-1,1]^s} f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\Lambda_q(f)\right| \succ\prec \frac{(\ln N)^{(r+1)(s-1)-s\tau}}{N^r},$$

мұнда $N=2^q q^{s-1}$ $-\Lambda_q(f)$ квадратуралық формуласындағы түйіндер саны.

Анықтама. 1 L_2 кеңістігінде ортонормаланған Чебышев көпмүшеліктерінің жүйесі берілсін

$$T_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}},\quad T_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\arccos x),\ n=1,2,\dots$$

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}c_{ij}(f)T_i(x)T_j(y)$$

түріндегі қатар $f\in L_2$ *функциясының* екі еселі Фурье-Чебышев қатары деп аталады, мұнда

$$c_{ij}(f)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}f(x,y)T_i(x)T_j(y)dxdy$$

$f\in L_2$ функциясының Фурьө-Чебышев коэффициенттері.

Анықтама 2 $f(x)$ функциясы $[a,в]$ сегментінде беріліп, өлшенетін болсын, $1\le p<\infty$ үшін $\int_a^в |f(x)|^p dx<+\infty$ шартын қанағаттандыратын функциялар жиынын L_p деп белгілейміз. L_p-кеңістігіндегі норманы былай анықтаймыз:

$$\|f\|_{L_p}=\left(\int_{[0,1]^s}|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},(1\le p<\infty)$$

2.2 Қажетті леммалар

Гелдер теңсіздігі

$p,q>1,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *және* $\{\xi_k\}$ *және* $\{\eta_k\}$ *тізбектері үшін*

$$\sum_{k=1}^{m}|\xi_k\eta_k| \le \left(\sum_{k=1}^{m}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{m}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

теңсіздігі орынды.

Дәлелдеуі. $[0,+\infty)$ аралығында анықталған $\varphi(t)=\frac{t^p}{p}+\frac{1}{q}-t$ функциясын қарастырайық және

$t\le\frac{t^p}{p}+\frac{1}{q}$ (*) теңсіздігі орынды.

$t=uv\frac{1}{p-1},\quad u\ge 0,\quad v\ge 0$ болғанда (*) теңсіздігін пайдалансақ

$$uv\le\frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}\quad (**).$$

Мынадай белгілеу енгізейік

$$\|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{m}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad \|y\|_p=\left(\sum_{k=1}^{m}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

енді $u=\frac{|\xi_k|}{\|x\|_p},\quad v=\frac{|\eta_k|}{\|y\|_q}$ деп алсақ

$\frac{|\xi_k|\cdot|\eta_k|}{\|x\|_p\cdot\|y\|_q}\le\frac{|\xi_k|^p}{\|x\|_p^p}+\frac{|\eta_k|^q}{\|y\|_q^q}$ к бойынша қосынды алсақ

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}|\xi_k|\cdot|\eta_k|}{\|x\|_p\cdot\|y\|_q}\le\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}|\xi_k|^p}{\|x\|_p^p}+\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}|\eta_k|^q}{\|y\|_q^q}=1$$

соңғы өрнектен $\sum_{k=1}^{m}|\xi_k||\eta_k|\le\|x\|_p\cdot\|y\|_q$

Яғни лемма дәлелденді.

3 ЖАЛПЫЛАНҒАН ҮЗІЛІЛІССІЗДІК МОДУЛІМЕН ФУНКЦИЯЛАР КЛАСЫНДА ИНТЕГРАЛДЫ ЖУЫҚТАУ

$L_2 = L_2\left(\left(1-x^2\right)^{-1/2};[-1,1]\right)$ - $\left(1-x^2\right)^{-1/2}$ түйінімен және екінші дәрежесінде интегралданатын $f:[-1,1]\to R$ функциялар кеңістігі болсын. Бұл кеңістіктің нормасы келесі формуламен анықталады

$$\|f\| = \left[\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f^2(x)dx\right]^{1/2}$$

L_2 кеңістігінде келесі операторды қарастырайық

$$F_h f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(x\cosh + \sqrt{1-x^2}\sinh\right) + f\left(x\cosh - \sqrt{1-x^2}\sinh\right)\right]$$

бұл операторды жалпыланған қозғау (сдвиг) операторы деп атайық.

Бірінші ретті және жоғары ретті айырымдарды келесі формулаларымен анықтайық:

$$\Delta_h(f;x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - E)f(x),$$

$$\Delta_h^k(f;x) = \Delta_h\left(\Delta_h^{k-1}(f;x);x\right) = (F_h - E)^k f(x) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}F_h^i f(x)$$

мұнда $F_h^0 f(x) = f(x), F_h^i f(x) = F_h\left(F_h^{i-1} f(x)\right), i = 1,2,...,k, k = 1,2,...,$ E $-L_2$ кеңістігінде бірлік оператор.

Екінші ретті дифференциалдық оператор келесі формуламен анықталады

$$D = \left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}$$

Енді функциялар кластарын қарастырайық:

$W_{2,\varphi}^{r,k}(D)$ - Леви мағынасында жалпыланған туындылары бар болатын және L_2 кеңістігіне жататын және

$$\sup_{0<h\le\delta}\left\|\Delta_h^k\left(D^r f;x\right)\right\| = O\left(\varphi\left(\delta^k\right)\right), r = 0,1,...,k = 1,2,...,$$

шартты қанағаттандыратын $f \in L_2$ функциялар класы.

мұнда $D^0 f = f, D^r f = D\left(D^{r-1} f\right), r = 1,2,...; \varphi(t)$ - $[0;+\infty)$ аралығында анықталған үзіліссіз, монотонды өсетін функция, $\varphi(0) = 0$;

$W_\varphi^{r,k}(D)$ - $[-1,1]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын және

$$\sup_{0<h\le\delta}\left\{\max_{-1\le x\le 1}\left|\Delta_h^k\left(D^r f;x\right)\right|\right\} = O\left(\varphi\left(\delta^k\right)\right), r = 0,1,...,k = 1,2,...$$

шартты қанағаттандыратын функциялар класы.

$W_\varphi^{r,k}(D) \subset W_{2,\varphi}^{r,k}(D)$.

Теорема.

$\int_0^1 \varphi\left[\left(\frac{\pi t}{n}\right)^k\right] t^{2r-3/2}dt < +\infty, r = 0,1,..., n = 1,2,...$ болсын.

Онда

$$\sup_{f\in W_{\varphi}^{r,k}(D)}\left|\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx-\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\cos\frac{2i-1}{2n}\pi\right)\right|=O\left(\frac{1}{n^{2r}}\int_0^1\varphi\left[\left(\frac{\pi t}{n}\right)^k\right]t^{2r-3/2}dt\right).$$

Дербес жағдайда, егер $\varphi(t)=t^{\alpha},0<\alpha<2,k=1,2r+\alpha>1/2$, онда

$$\sup_{f\in W_{,\alpha}^{r,1}(D)}\left|\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx-\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\cos\frac{2i-1}{2n}\pi\right)\right|=O\left(\frac{1}{n^{2r+\alpha}}\right)$$

Бұл теореманы дәлелдеу үшін бірнеше көмекші тұжырымдар қажет. Ары қарай, L_2 кеңістігіне ортонормаланған Чебышёв системыны қарастырайық

$$T_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}},T_i(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(i\arccos x),i=1,2,...,$$

$$f(x)\sum_{i=0}^{\infty}c_i(f)T_i(x),\quad c_i(f)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)T_i(x)dx \qquad (1)$$

тәсәлімен анықталған қатар $f\in L_2$ функцияның Фурье-Чебышев қатары деп аталады, ал

$$S_{n-1}(f;x)=\sum_{i=0}^{n-1}c_i(f)T_i(x),$$

(1) қатарының дербес туындысы.

Анықтама бойынша

$$\|f\|=\left[\sum_{i=0}^{\infty}c_i^2(f)\right]^{\frac{1}{2}},\|f-S_{n-1}(f)\|=\left[\sum_{i=n}^{\infty}c_i^2(f)\right]^{\frac{1}{2}}$$

және Чебышев көпмүшеліктері мыны дифференциалдық теңдеуді

$$(1-x^2)T_i''(x)-xT_i'(x)+i^2T_i(x)=0,$$

немесе

$$\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}T_i'(x)\right]'+i^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}T_i(x)=0\ .$$

қанағаттандырады.

Лемма 1. Егер $f\in W_{2,\varphi}^{r,k}(D)$, онда

$$c_i(f)=(-1)^r\frac{1}{i^{2r}}c_i(D^rf),i=1,2,...$$

Дәлелдеуі.

$$c_i(f)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)T_i(x)dx=-\frac{1}{i^2}\int_{-1}^{1}f(x)\left[\left(1-x^2\right)^{1/2}T_i'(x)\right]dx=$$

$$-\frac{1}{i^2}\int_{-1}^{1}f(x)d\left[\left(1-x^2\right)^{1/2}T_i'(x)\right]=\frac{1}{i^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{1/2}f'(x)T_i'(x)dx=$$

$$=\frac{1}{i^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{1/2}f'(x)dT_i(x)=-\frac{1}{i^2}\int_{-1}^{1}T_i(x)d\left[\left(1-x^2\right)^{1/2}f'(x)\right]=$$

$$=-\frac{1}{i^2}\int_{-1}^{1}\left[\left(1-x^2\right)^{1/2}f''(x)-x\left(1-x^2\right)^{-1/2}f'(x)\right]T_i(x)dx=$$

$$=-\frac{1}{i^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\left(1-x^2\right)f''(x)-xf'(x)\right]T_i(x)dx=-\frac{1}{i^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}Df(x)T_i(x)dx$$

$$c_i(f)=-\frac{1}{i^2}c_i(Df)$$

Бұдан 1 лемманың тұжырымы шығады.

Лемма 2. $f\in L_2$ болсын. Онда

$$c_i(F_hf)=\cos(ih)c_i(f),\ i\geq 1.$$

Дәлелдеуі. Чебышев көпмүшелігі анықтамасы бойынша

$$c_i(f)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)T_i(x)dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos(i\arccos x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos t)\cos(it)dt.$$

Сондықтан

$$c_i(F_hf)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}F_hf(x)T_i(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}F_h(\cos t)\cos(it)dt=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}[f(\cos(t-h))+f(\cos(t+h))]\cos(it)dt=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos t)\{f(\cos[i(t-h)])+f(\cos[i(t+h)])\}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos t)\cos(it)\cos(ih)dt$$

Сонымен,

$$c_i(F_hf)=\cos(ih)c_i(f)$$

1 ескерту. Егер $f\in W_{2,\varphi}^{r,k}(D)$, онда 1 және 2 лемма бойынша, Ньютон биномы ескере отырып

$$(a-b)^k=\sum_{i=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}a^lb^{k-l},$$

Парсеваль теңдігін пайданып,

$$\left\|\Delta_h^k\left(D^r f\right)\right\|^2=\sum_{i=0}^{\infty}[1-\cos(ih)]^{2k} i^{4r} c_i^2(f)$$

теңдігін аламыз.

Лемма 3. Егер $f \in W_{\varphi}^{r,k}(D)$ және

$$\int_0^1 \varphi^p\left[\left(\frac{\pi t}{m}\right)^k\right] t^{p/2+2pr-2} dt<+\infty, r=0,1,2,\ldots, k=1,2,\ldots, m=1,2,\ldots, 0<p \leq 2 .$$

Онда

$$\sum_{i=n}^{\infty}\left|c_{im}(f)\right|^p=O\left(\frac{1}{m^{2rp}} \int_0^{1/n} \varphi^p\left[\left(\frac{\pi t}{m}\right)^k\right] t^{p/2+2rp-2} dt\right),$$

мұндағы $O(1)$ константасы, , тек қана p,k және r тәуелді.

Дәлелденуі. Егер $f \in W_{\varphi}^{r,k}(D)$. $W_{\varphi}^{r,k}(D) \subset W_{2,\varphi}^{r,k}(D)$ үшін,онда Гёльдер теңсіздігі үшін, $k=1,2,\ldots$ мынадай нәтижеге ие боламыз

$$\sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f)-\sum_{i=n}^{\infty} \cos(ih) c_i^2(f)=\sum_{i=n}^{\infty}[1-\cos(ih)] c_i^2(f)=$$

$$=\sum_{i=n}^{\infty}\left|c_i(f)\right|^{2-1/k}\left|c_i(f)\right|^{1/k}[1-\cos(ih)] \leq$$

$$\leq\left(\sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f)\right)^{(2k-1)(2k)}\left(\sum_{i=n}^{\infty}[1-\cos(ih)]^{2k} c_i^2(f)\right)^{1/(2k)} \leq\left(\sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f)\right)^{(2k-1)(2k)} n^{-2r/k}\left(\sum_{i=n}^{\infty}[1-\cos(ih)]^{2k} i^{4r} c_i^2(f)\right)^{1/(2}$$

$$=\left(\sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f)\right)^{(2k-1)(2k)} n^{-2r/k}\left\|\Delta_h^k\left(D^r f\right)\right\|^{1/k}.$$

Бұдан мынадай нәтиже аламыз

$$\sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f) \leq\left(\sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f)\right)^{(2k-1)(2k)} n^{-2r/k}\left\|\Delta_h^k\left(D^r f\right)\right\|^{1/k}+\sum_{i=n}^{\infty} \cos(ih) c_i^2(f),$$

немесе

$$\sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f) \leq\left(\sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f)\right)^{(2k-1)(2k)} n^{-2r/k} \varphi^{1/k}\left(h^k\right)+\sum_{i=n}^{\infty} \cos(ih) \cos c_i^2(f),$$

Соңғы теңсіздіктің екі жағын $\sin(nh), h \in[0, \pi/n]$ көбейтіп, және пайда болған теңсіздікті $[0, \pi/n]$ интервалында интегралдасақ, онда

$$\frac{2}{n} \sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f) \leq \frac{2}{n}\left(\sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f)\right)^{(2k-1)/(2k)} n^{-2r/k} \varphi^{1/k}\left[\left(\frac{\pi}{n}\right)^k\right]+\sum_{i=n}^{\infty} a_i c_i^2(f)$$

теңсіздігін аламыз.

мұнда

$$a_i = \int_0^{\pi/n} \sin(nh)\cos(ih)dh.$$

Байқап қарасақ $a_n = 0, a_i \le 0, i > n$, соңғы теңсіздіктен мынадай теңсіздікті аламыз

$$\frac{2}{n}\sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f) \le \frac{2}{n}\left(\sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f)\right)^{(2k-1)/(2k)} n^{-2r/k}\varphi^{1/k}\left[\left(\frac{\pi}{n}\right)^k\right].$$

Осы жерден мына теңдікті байқау қиын емес

$$\sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f) = O\left(n^{-4r}\varphi^2\left[\left(\frac{\pi}{n}\right)^k\right]\right).$$

Бұл баға өзінің дербес қызығушылығын көрсетеді. Бұдан мынадай баға шығуы анық.Бұдан

$$\|f - S_n(f)\| = O\left(n^{-2r}\varphi\left[\left(\frac{\pi}{n}\right)^k\right]\right)$$

$W_{2,\varphi}^{r,k}(D)$ класының L_2 кеңістігіндегі Фурье-Чебышёв қатарының дербес қосындының жинақталуы шығады.

(4) бағалаудан кез келген $m \in \mathrm{N}$ үшін

$$\sum_{i=n}^{\infty} c_{im}^2(f) \le \sum_{i=mn}^{\infty} c_i^2(f) = O\left((mn)^{-4r}\varphi^2\left[\left(\frac{\pi}{mn}\right)^k\right]\right).$$ мынадай теңсіздәкке ие боламыз

Осы жерден кез келген $n \in \mathrm{N}$ үшін

$$\sum_{i=n}^{2n-1} c_{im}^2(f) = O\left((mn)^{-4r}\varphi^2\left[\left(\frac{\pi}{mn}\right)^k\right]\right).$$ теңдігіне ие боламыз.

Қайтадан Гёльдер теңсіздігін қолдансақ

$$\sum_{i=n}^{2n-1} |c_{im}(f)|^p \le \left\{\sum_{i=n}^{2n-1} c_{im}^2(f)\right\}^{p/2} (2n)^{1-p/2},$$

мынадай нәтиже аламыз

$$\sum_{i=n}^{2n-1} |c_{im}(f)|^p \le O\left(m^{-2rp}\varphi^p\left[\left(\frac{\pi}{mn}\right)^k\right] n^{1-2rp-p/2}\right).$$

Демек

$$\sum_{i=n}^{\infty}|c_{im}(f)|^p=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2^i n}^{2^{i+1}n-1}|c_{im}(f)|^p=O\left(m^{-2rp}\sum_{i=0}^{\infty}\varphi^p\left[\left(\frac{\pi}{2^i mn}\right)^k\right](2^i n)^{1-2rp-p/2}\right).$$

Енді қосындыны бағалайық

$$\sum_{i=0}^{\infty}\varphi^p\left[\left(\frac{\pi}{2^i mn}\right)^k\right](2^i n)^{1-2rp-p/2}$$

Байқасақ

$$\varphi^p\left[\left(\frac{\pi}{2^i mn}\right)^k\right](2^i n)^{1-2rp-p/2}=\int_{2^i n}^{2^{i+1}n}\varphi^p\left[\left(\frac{\pi}{2^i mn}\right)^k\right](2^i n)^{-2rp-p/2}dt$$

Одан басқа, $2^i n\le t\le 2^{i+1}n$ аралығында

$$\varphi^p\left[\left(\frac{\pi}{2^{i+1}mn}\right)^k\right](2^{i+1}n)^{-2rp-p/2}\le\varphi^p\left[\left(\frac{\pi}{mt}\right)^k\right]t^{-2rp-p/2}\le\varphi^p\left[\left(\frac{\pi}{2^i mn}\right)^k\right](2^i n)^{-2rp-p/2}$$ теңсіздігіне

иеміз.

Демек,

$$\varphi^p\left[\left(\frac{\pi}{2^i mn}\right)^k\right](2^i n)^{1-2rp-p/2}=O\left(\int_{2^i n}^{2^{i+1}n}\varphi^p\left[\left(\frac{\pi}{mt}\right)^k\right]t^{-2rp-p/2}dt\right)$$ және

$$\sum_{i=n}^{\infty}|c_{im}(f)|^p=O\left(\frac{1}{m^{2rp}}\int_n^{+\infty}\varphi^p\left[\left(\frac{\pi}{mt}\right)^k\right]t^{-2rp-p/2}dt\right).$$

$t=1/x$, екенін ескеріп, мынадай нәтиже аламыз.

1-салдар. Егер $r=0,k=1,n=1,m=1,p=1,\varphi(t)=t^{\alpha},\alpha>1/2$, онда

$$\sum_{i=1}^{\infty}|c_i(f)|<+\infty.$$

Тригонометриялық Фурье қатарының абсолютті жинақталғаны туралы Бернштейн теоремасы.

2-салдар. Егер $(p=1)$

$$\int_0^1\varphi\left[\left(\frac{\pi t}{m}\right)^k\right]t^{2r-3/2}dt<+\infty,\ r=0,1,\dots,k=1,2,\dots,m=1,2,\dots,$$

Онда

$$\sum_{i=1}^{\infty}|c_{im}(f)|=O\left(\frac{1}{m^{2r}}\int_0^{1/n}\varphi\left[\left(\frac{\pi t}{m}\right)^k\right]t^{2r-3/2}dt\right).$$

Теореманың дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j(f)T_j(x).$$

Сондықтан

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx-\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\cos\frac{2i-1}{2n}\pi\right)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx-\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=0}^{\infty}c_j(f)T_j\left(\cos\frac{2i-1}{2n}\pi\right)\right]=$$
$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx-\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[c_0(f)T_0\left(\cos\frac{2i-1}{2n}\pi\right)+\sum_{j=1}^{\infty}c_j(f)T_j\left(\cos\frac{2i-1}{2n}\pi\right)\right].$$

$T_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ и $c_0(f)T_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx,$ болғандықтан

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx-\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\cos\frac{2i-1}{2n}\pi\right)=-\frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{\infty}c_j(f)\left[\sum_{i=1}^{n}T_j\left(\cos\frac{2i-1}{2n}\pi\right)\right]=$$
$$=-\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j=1}^{\infty}c_j(f)\left(\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2i-1}{2n}j\pi\right).$$

мұнда

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2i-1}{2n}j\pi=\begin{cases}0, j\neq 2m\pi\\(-1)^m n, j=2mn\end{cases}$$

Демек,

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx-\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\cos\frac{2i-1}{2n}\pi\right)=-\sqrt{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m c_{2mn}(f).$$

2 салдарды пайдалану керек.

Теорема дәлелденді.

ҚОРЫТЫНДЫ

Осы жұмыста [-1,1] аралығында $\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1}$ салмағымен квадратуралық формуланың қалдығының $W_{\varphi}^{r,k}(D)$ класында бағалауы алынған.Квадратуралық формула Чебышев көпмүшелігінің нөлдерінің түйіні бойынша алынған.Келесі анықтамалар пайдаланылған:

1) Жалпыланған қорғау операторы

2)Бір айнымалы функция үшін Фурье-Чебышев қатарының анықтамасы.

Квадратуралық формуланың қалдығы жинақталатын Фурье – Чебышев қатарының қалдығы арқылы өрнектеледі.

ПАЙДАЛАНҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы сходимости кратных рядов Фурье // Ж.вычисл.матем. и матем.физ.1999. Т.39.№ 12. С.1951 – 1961.

2. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука,1983.

3. Н.Темиргалиев, С.С. Кудайбергенов, А.А. Шоманова. Применение тензорных произведений функционалов в задачах численного интегрирования // Изв. РАН, сер. матем, 73:2 (2009), 183 – 224.

4. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

5. Коробов Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.

6. Смоляк С.А. Интерполяционные и квадратурные формулы на классах W_s^α и E_s^α // Докл. АН СССР. 1960. Т.131. №5. – С.1028-1031.

7. Бахвалов Н.С. О приближенном вычислении кратных интегралов //Вестн. МГУ. Сер. матем., мех .1959. №4.С.3 -18.

8. Фролов К.К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций// Докл. АН СССР. 1976.Т. 231, №4.С. 818-821.

9. Шарыгин И.Ф. Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций// Ж.выч.матем. и матем. физики.1963.Т.3.С.370-376.

10. Hlawka E. Zur angenдherten Berechnung mehrfacher Integrale//Monatsh. Math. 1962. B.66. Z.140-151.

11. Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных //Матем.сб.1990.Т. 181, №4.С. 490-505.

12. Смоляк С.А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций //Докл.АН СССР.1963.Т.148,№5.С.1042-1045.

13. Темляков В.Н. Квадратурные формулы и восстановление по значениям в узлах теоретико-числовых сеток для классов функций малой гладкости // Успехи матем.наук. 1985. Т.40,№4.С.203-204.

14. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

15. Темляков В.Н. Приближенное восстановление периодических функций многих переменных //Матем.сб. 1985.Т.228,№2.С.256-268.

16.Темиргалиев Н. Классы $U_S(\beta,\theta,\alpha;\psi)$ и квадратурные

формулы//Докл.РАН. 2003.Т.393.№5.С.605-608
17.Воронин С.М. О построении квадратурных формул //Изв.РАН. Сер. матем. 1995. Т.59, №4.С.3-8
18.Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. О приближенном вычислении интегралов для функций из пространства $W_p^{\alpha}[0,1]^n$ //Успехи матем. наук, 2000. Т.55,№6. С. 153-154
19.Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. Квадратурные формулы для классов функций малой гладкости//Матем. сб. 2003. Т.194,№10. С. 133-160.
20. В.А. Абилов, Ф.В.Абилова. Об одной квадратурной формуле // Ж.выч.матем. и матем. физики.2002.Т.42.№4. С.451-458.