**М.Т. Дженалиев,**
доктор физика-математических наук,
профессор,
Институт математики МОН РК.
Алматы/Казахсатан

**К.Б.Иманбердиев,**
Казахский национальный университет
им. аль-Фараби.
Алматы/Казахсатан

# ОБ ОПТИМИЗАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ-ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

**Введение.** В последнее время среди специалистов по уравнениям математической физики значительно возрос интерес к задачам, не являющимся корректными по J.Hadamard [1]. Они всегда привлекали внимание исследователей. Прежде всего, это связано с их важностью не только в теоретическом плане, но также и с тем, что с ними приходиться сталкиваться во многих прикладных задачах из различных областей науки и техники. Здесь можно отметить классические работы J.Hadamard [1], А.Н.Тихонова [2], М.М.Лаврентьева [3] и многих других, обративших внимание исследователей на некорректные задачи и внесших существенный вклад в развитие этого важного направления математики.

В данной работе для решения исходной задачи мы применяем методы оптимального управления.

**1. Постановка задачи.** В области $\Omega = \{x,t \mid 0 < x < \pi,\ -1 < t < 1\}$ рассматривается следующая граничная задача

$$y_{tt}(x,t) + y_{xx}(x,t) = f(x,t),\ x \in (0,\pi),\ t \in (-1,1), \tag{1}$$

$$y(0,t) = 0,\ y(\pi,t) = 0 \tag{2}$$

$$y(x,-1) = \varphi_1(x),\ y_t(x,-1) = \varphi_2(x). \tag{3}$$

Будем предполагать, что данные в задаче (1)–(3) удовлетворяют следующим условиям:

$$f \in L_2(\Omega),\ \varphi_1 \in H_0^1(0,\pi),\ \varphi_2 \in L_2(0,\pi). \tag{4}$$

Поскольку по переменной $t$ заданы условия Коши, задача является некорректно поставленной.

**2. Задача оптимизации.** Поставим в соответствие задаче (1)–(3) следующую оптимизационную задачу:

$$y_{tt}(x,t) + y_{xx}(x,t) = f(x,t), \tag{5}$$

$$y(0,t) = y(\pi,t) = 0, \tag{6}$$

$$y_t(x,-1) = \varphi_2(x),\ y_t(x,1) = \psi(x),\ \psi(x) \in L_2(\Omega), \tag{7}$$

функционал оптимальности:

$$J(\psi) = \int_0^\pi | y_x(x,-1) - \varphi_1'(x) |^2 \, dx \to \min_{\psi}, \tag{8}$$

где $\psi$ играет роль функции управления.

Таким образом, мы сформулировали задачу оптимального управления (4)–(8), которая, как известно, также некорректна.

**3. Регуляризация задачи оптимизации.** Эффективным инструментом решения некорректной задачи является метод регуляризации. Используя этот метод, для рассматриваемой задачи нужно выбрать стабилизатор. В нашем случае управление выбирается из множества $U \equiv L_2(0,\pi)$, поэтому, функционал $\alpha \cdot \int_0^{\pi} |\psi(x)|^2 \, dx$ может служить стабилизатором. Этот математический прием называют регуляризацией по-Тихонову. Здесь: $\alpha > 0$.

Далее, на множестве $U$ рассматривается задача минимизации функционала:

$$J_\alpha(\psi) = \int_0^{\pi} | y_x(x,-1) - \varphi_1'(x) |^2 \, dx + \alpha \cdot \int_0^{\pi} |\psi(x)|^2 \, dx \to \min_{\psi \in U}. \qquad (9)$$

Для задачи оптимизации (4)–(7) и (9) необходимо получить условия оптимальности.

**4. Существование решения регуляризованной задачи.** Введем определение.

**Определение 1.** *Элемент* $\overline{\psi}(x) \in L_2(0,\pi)$, *удовлетворяющий условию*

$$J(\overline{\psi}) = \inf_{\psi \in U} J(\psi),$$

*называется оптимальным управлением.*

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Для задачи (4)–(7) и (9) найдется такой элемент* $\overline{\psi} \in U$ :

$$J(\overline{\psi}) = \inf_{\psi \in U} J(\psi),$$

*и этот элемент будет единственным.*

Согласно результатам работы [4] справедливо следующее

**Утверждение 1.** $\overline{\psi} \in U$ *является функцией оптимального управления, только тогда, когда выполняется следующее неравенство:*

$$\left\langle J_{\alpha\psi}(\overline{\psi}), \psi - \overline{\psi} \right\rangle \geq 0, \ \forall \psi \in U \equiv L_2(0,\pi),$$

*т.е. выполняется*

$$\int_0^{\pi} [y_x(x,-1;\overline{\psi}) - \varphi_1'(x)] \cdot \frac{\partial}{\partial x} \{ y_\psi(x,-1;\overline{\psi})[\psi(x) - \overline{\psi}(x)] \} dx +$$
$$+ \alpha \cdot \int_0^{\pi} \overline{\psi}(x) \cdot [\psi(x) - \overline{\psi}(x)] dx \geq 0, \quad \forall \psi \in U. \qquad (10)$$

Преобразуем неравенство (10). Для этого граничную задачу (4)–(7) и (9) запишем в операторном виде: $Ay = F \overset{\Delta}{=} \{f, \varphi_2, \psi\}$. Решение $y(x,t;\psi)$ этого операторного уравнения можно записать следующем виде: $y(x,t;\psi) = A^{-1}F = A_0^{-1} f + A_1^{-1}\varphi_2 + A_2^{-1}\psi$.

Для производной решения граничной задачи (5) –(7) по направлению $\psi - \overline{\psi}$ :

$$y_\psi(x,t;\overline{\psi}) \cdot [\psi - \overline{\psi}] = y(x,t;\psi) - y(x,t;\overline{\psi}).$$

Таким образом, неравенство (10) принимает вид:

$$\int_0^{\pi} [y_x(x,-1;\overline{\psi}) - \varphi_1'(x)] \cdot [y_x(x,-1;\psi) - y_x(x,-1;\overline{\psi})] dx +$$
$$+ \alpha \cdot \int_0^{\pi} \overline{\psi}(x) \cdot [\psi(x) - \overline{\psi}(x)] dx \geq 0, \quad \forall \psi \in U. \qquad (11)$$

**5. Сопряженная граничная задача.** Далее, ведем сопряженную задачу

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t) + v_{xx}(x,t) = 0, \quad x \in (0,\pi), \ t \in (-1,1); \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0, \quad t \in (-1,1); \\ v_t(x,-1) = -\partial[y_x(x,-1;\overline{\psi}) - \varphi_1'(x)]/\partial x, \quad v_t(x,1) = 0. \end{cases} \qquad (12)$$

**6. Условия оптимальности.** Используя равенство

$$v_t(x,-1) = -\partial[y_x(x,-1;\overline{\psi}) - \varphi_1'(x)]/\partial x$$

перепишем выражение (11) в виде:

$$\int_0^\pi [-\nu(x,1;\overline{\psi}) + \alpha \cdot \overline{\psi}(x)] \cdot [\psi(x) - \overline{\psi}(x)] dx \geq 0, \quad \forall\, \psi \in U. \qquad (13)$$

Таким образом, из (5)–(7), (12) и (13) получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) + y_{xx}(x,t) = f(x,t), \\ y(0,t) = y(\pi,t) = 0, \\ y_t(x,-1) = \varphi_2(x); \quad y(x,1) = \overline{\psi}. \end{cases} \qquad (14)$$

$$\begin{cases} \nu_{tt}(x,t) + \nu_{xx}(x,t) = 0, \\ \nu(0,t) = \nu(\pi,t) = 0, \\ \nu_t(x,-1) = -\partial/\partial x \cdot [y_x(x,-1;\overline{\psi}) - \varphi_1'(x)], \quad \nu(x,1) = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

$$\int_0^\pi [-\nu(x,1;\overline{\psi}) + \alpha \cdot \overline{\psi}(x)] \cdot [\psi(x) - \overline{\psi}(x)] dx \geq 0, \quad \forall\, \psi \in U, \qquad (16)$$

на основе, которых сформулируем условия оптимальности в виде утверждения:

**Утверждение 2.** *Чтобы элемент $\overline{\psi}$ был оптимальным решением в задаче (4)–(7) и (9), необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял граничным задачам (14), (15) и вариационному неравенству (16).*

**7. Применение метода разделения переменных.** Для разрешения условий оптимальности (14)–(16) используем метод разделения переменных. Будем искать решения граничных задач (14) и (15) в виде

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) X_k(x), \quad \nu(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k(t) X_k(x)$$

где

$$X_k(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi/2}}, \ \lambda_k = k^2, \ k = 1,2,\ldots, \qquad (17)$$

системы ортонормированных собственных функций и собственных значений для спектральной задачи:

$$X''(x) = \lambda \cdot X(x), \quad X(0) = X(\pi) = 0.$$

Из (14)–(16) соответственно получаем:

$$y_k''(t) - k^2 y_k(t) = f_k(t), \ t \in (-1,1), \ y_k'(-1) = \varphi_{2k}; \ y_k'(1) = \overline{\psi}_k; \ k = 1,2,\ldots, \qquad (18)$$

$$\nu_k''(t) - k^2 \nu_k(t) = 0, \ t \in (-1,1), \ \nu_k'(-1) = k^2 [y_k(-1) - \varphi_{1k}]; \ \nu_k'(1) = 0; \ k = 1,2,\ldots, \qquad (19)$$

$$[-\nu_k(1) + \alpha \cdot \overline{\psi}_k] \cdot [\psi_k - \overline{\psi}_k] \geq 0, \text{ для } \forall\, \psi_k, \ k = 1,2,\ldots, \qquad (20)$$

где $f_k(t)$, $\varphi_{1k}$, $\varphi_{2k}$, $\overline{\psi}_k$, $\psi_k$, $k = 1,2,\ldots$ – коэффициенты Фурье функций $f(x,t)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $\overline{\psi}(x)$, $\psi(x)$ по системе (17).

Выпишем решения граничных задач (18) и (19):

$$y_k(t) = \overline{\psi}_k \cdot \frac{ch\, k(t+1)}{sh\, 2k} - \varphi_{2k} \cdot \frac{ch\, k(1-t)}{k\, sh\, 2k} + \int_{-1}^{1} G_k(t,\tau) \cdot f_k(\tau)\, d\tau; \qquad (21)$$

$$\nu_k(t) = -[y_k(-1) - \varphi_{1k}] \cdot \frac{k\, ch\, k(1-t)}{sh\, 2k}; \qquad (22)$$

где

$$G_k(t,\tau) = \begin{cases} -\dfrac{ch\, k(1-t) \cdot ch\, k(1+\tau)}{sh\, 2k}, & -1 < \tau < t < 1; \\ -\dfrac{ch\, k(1-\tau) \cdot ch\, k(1+t)}{sh\, 2k}, & -1 < t < \tau < 1. \end{cases} \qquad (23)$$

Из (18)–(20) и (22) находим:

$$-v_k(1) = [y_k(-1) - \varphi_{1k}] \cdot \frac{k}{sh\,2k},$$

$$y_k(-1;\overline{\psi}_k) = -\varphi_{2k} \cdot \frac{cth\,2k}{k} + \overline{\psi}_k \cdot \frac{1}{sh\,2k} + \int_{-1}^{1} G_k(-1,\tau) \cdot f_k(\tau)\,d\tau$$

$$\left[A_{k\alpha}\overline{\psi}_k - \varphi_{1k} - \varphi_{2k} \cdot \frac{cth\,2k}{k} + \int_{-1}^{1} G_k(-1,\tau) \cdot f_k(\tau)\,d\tau\right] \cdot [\psi_k - \overline{\psi}_k] \ge 0 \text{ для } \forall\ \psi_k. \qquad (24)$$

где $A_{k\alpha} = (k + \alpha \cdot sh^2 2k)/k\,sh\,2k$, $k = 1,2,\ldots$.

Так как для функций $\psi(x)$ нет ограничений кроме принадлежности пространству $L_2(0,\pi)$, то из (24) находим оптимальные значения Фурье-коэффициентов $\overline{\psi}_k(x)$, $k = 1,2,\ldots$:

$$\overline{\psi}_k = A_{k\alpha}^{-1}\left[\varphi_{1k} + \varphi_{2k} \cdot \frac{cth\,2k}{k} - \int_{-1}^{1} G_k(-1,\tau) \cdot f_k(\tau)\,d\tau\right]. \qquad (25)$$

Далее, при $\alpha \to 0$ из (21) и (25) имеем:

$$\begin{gathered} y_{k0}(t) = \lim_{\alpha \to 0} y_k(t) = \varphi_{1k} ch\,k(1+t) + \varphi_{2k} \cdot \frac{sh\,k(1+t)}{k} - \\ - ch\,k(1+t)\int_{-1}^{1} G_k(-1,\tau) \cdot f_k(\tau)\,d\tau + \int_{-1}^{1} G_k(t,\tau) \cdot f_k(\tau)\,d\tau, \end{gathered} \qquad (26)$$

$$\overline{\psi}_{k0}(t) = \lim_{\alpha \to 0} \overline{\psi}_k = \varphi_{1k} sh\,2k + \varphi_{2k} \cdot \frac{ch\,2k}{k} - sh\,2k\int_{-1}^{1} G_k(-1,\tau) \cdot f_k(\tau)\,d\tau. \qquad (27)$$

Кроме того, решения $y_k(t)$, найденные по формуле (21) в соответствии с оптимальными коэффициентами Фурье $\overline{\psi}_k(x)$, $k = 1,2,\ldots$ (25) должны удовлетворять следующим предельным соотношениям:

$$\lim_{\alpha \to 0} y_k(-1) = \varphi_{1k},$$

которые действительно имеют место. И это согласуется с условием $y(x,-1) = \varphi_1(x)$ из (3).

Таким образом, для нахождения точного решения задачи (4)–(8) в соответствии (27) составим следующий ряд:

$$\overline{\psi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2/\pi} \cdot sh\,2k\left[\varphi_{1k} + \varphi_{2k} \cdot \frac{cth\,2k}{k} - \int_{-1}^{1} G_k(-1,\tau) \cdot f_k(\tau)\,d\tau\right] \sin kx$$

а для исходной задачи Коши-Дирихле (1)–(3) получим решение на основе формул (26).

**Заключение.** Из равенств (26) и (27) непосредственно следуют:

во-первых, что с ростом индекса $k$ и при $\alpha \to 0$ коэффициенты Фурье функции $\overline{\psi}(x)$ и соответственно решение $y_k(t)$ могут неограниченно возрастать, если этот рост не будет "подавляться" соответствующим более быстрым уменьшением абсолютных величин коэффициентов $\varphi_{1k}$, $\varphi_{2k}$ и значений норм $\| f_k(t) \|_{L_2(-1,1)}$;

во-вторых, что граничная задача (1)–(3) при условиях (4) имеет единственное $L_2$-сильное решение [5], тогда и только тогда, когда

$$\{\exp\{2k\} \cdot \varphi_{1k}\}_{k=1}^{\infty},\ \{k^{-1}\exp\{2k\} \cdot \varphi_{2k}\}_{k=1}^{\infty},\ \{\exp\{2k\} \cdot \| f_k(\tau) \|_{L_2(-1,1)}\}_{k=1}^{\infty} \subset l_2. \qquad (28)$$

Таким образом, становиться ясным не только смысл регуляризации в задаче (5)–(7) и (9), но и природа некорректности в задаче Коши-Дирихле (1)–(3). А регуляризация позволяет найти приближенное решение.

В-третьих, рассмотрим пример Адамара [6, с.37]. Для того чтобы получить аналог примера Адамара в задаче (1)–(3) необходимо принять:

$$f(x,t)=0,\ \varphi_1(x)=0,\ \varphi_2(x)=\sqrt{2/\pi}\cdot k\cdot \exp\left\{-\sqrt{k}\right\}\sin kx,\ k\in N.$$

Действительно, решение задачи Коши-Дирихле для уравнения Пуассона будет иметь вид:

$$y(x,t)=\sqrt{2/\pi}\cdot \exp\left\{-\sqrt{k}\right\}\cdot \sin kx\cdot \sin k(t+1),\ k\in N. \tag{29}$$

Это решение задачи в рассматриваемом нами примере Адамара единственно. Более того, при $k\to\infty$ функция $\varphi_2(x)$ равномерно стремится к нулю и притом не только сама, но и все ее производные и принадлежит пространству $L_2(-1,1)$. Однако решение (29) при любом $t>-1$ имеет вид синусоиды со сколь угодно большой амплитудой и не принадлежит пространству $L_2((0,\pi)\times(-1,1))$.

Для того чтобы для функции $\varphi_2(x)$ удовлетворяло условию (28), необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты Фурье $\varphi_{2k}$ имели асимптотику для больших $k$ порядка $\exp\{-(2+\varepsilon)k\}$, где $\varepsilon>0$. В рассматриваемом нами примере Адамара имеем асимптотику всего лишь равную: $\exp\left\{-\sqrt{k}\right\}$, которого явно недостаточно для корректности задачи Коши-Дирихле для уравнения Пуассона.

Отметим, что критерий корректности однородной смешанной задачи Коши для уравнения Пуассона в прямоугольной области был установлен в работе Кальменова Т.Ш. и Искаковой У.А. [9]. В ней критерий корректности был получен в терминах собственных значений и коэффициентов разложения правой части уравнения по полной ортонормированной системе собственных функций некоторого семейства обобщенных спектральных задач с наличием оператора отклонения-инвертирования одной из двух независимых переменных. В работе [10] рассматривается некорректная задача для уравнения теплопроводности. Общий метод регуляризации построения приближенного решения некорректных задач математической физики был предложен Тихоновым А.Н. [2]. В работе R. Lattes и J.-L. Lions [7] для регуляризации некорректно поставленных краевых задач предлагается метод квазиобращения путем замены исходного уравнения семейством вспомогательных с малым параметром (имеющих более высокий дифференциальный порядок), для каждого из которых решается корректная граничная задача. Особенности и вопросы регуляризации задач Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами изучают Melnikova I.V. и Anufrieva U.A. [8], где на основе применения методов полугрупп ими получены алгоритмы построения точных и регуляризованных решений.

## ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:


1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978, 352 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979, 142 с.
3. Лаврентьев М.М. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 20, № 6. С. 819–842.
4. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. Изд. МИР, Москва, 1972.
5. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980, 207 с.
6. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966, 444 с.
7. Lattes R., Lions J.-L. Methode de quasireversibilite et applications. Paris: Dunod, 1967.
8. Melnikova I.V., Anufrieva U.A. // Journal of Mathematical Sciences. 2008. 148, No.4. P.481–632.
9. Кальменов Т.Ш., Искакова У.А. Критерий сильной разрешимости смешенной задачи Коши для уравнения Лапласа // Докл. РАН. 2007. Т. 414, № 2. С. 168–171.

10. Дженалиев М.Т., Кальменов Т.Ш., Рамазанов М.И. // Материалы "Совещания Российско-Казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям" – Алматы: КазНУ им. аль-Фараби, 2009. С.162–167.

**Түйін**

Шектелген екі-өлшемді облыста Пуассон теңдеуі үшін Коши-Дирихле есебі қарастырылады. Зерттелуші корректті емес шекаралық есеп тиімді басқару есебіне сәйкестеледі. Түйіндес шекаралық есептің шешімі арқылы тиімділік шарттары табылған. Корректті емес шекаралық есеп үшін әлді шешілетіндігінің критериі табылған.

**Summary**

In the bounded two-dimensional rectangular region we study Cauchy-Dirichlet problem for the Poisson equation. The studied ill-posed boundary value problem is reduced to an optimal control problem. The optimality conditions are stated with help of the solution of the ad joint boundary value problem. It is found a criterium of the strongly solvability of the incorrect boundary value problem.

**Özet**

Sınırlı iki boyutlu dikdörtgen bölgesini biz Poisson denklemi için Cauchy-Dirichlet problemi eğitim.Çalışılan kötü poz sınır değer problemine optimal bir kulla-nabilmenizi sorunu azalır.Eniyileme koşulları reklamın ortak sınır değer probleminin çözümü yardımı ile belirtilmiştir. Bu yanlış sınır değer probleminin güçlü çözülebilen bir kriter bulunur.

**Т.М.Алдибеков,**
доктор физика-математических наук,
профессор.
Казахский национальный университет
им. аль-Фараби.
Алматы/Казахстан

## ОБ ОЦЕНКЕ И УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t,y), (0 < t_0 \le t < +\infty) \tag{1}$$

$A(t) \in C([t_0,+\infty))$, $\|A(t)\| \le a$ при $t_0 \le t < +\infty$,

$$f(t,y) \in C^{(0,1)}_{t,y}(D), D = \{t_0 \le t < +\infty, y \in R^n\}, \; f(t,0) \equiv 0, \lim_{y\to 0}\frac{f(t,y)}{\|y\|} = 0.$$

Пусть $\lambda_1,...,\lambda_n$ - характеристические показатели Ляпунова [1] системы первого приближения,

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, (0 < t_0 \le t < +\infty) \tag{2}$$

а $\beta_1,...,\beta_n$ - отвечающие им показатели второго порядка, которые определяются по нормальному базису формулой:

$$\beta_i = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{q_2(t)}\ln\left[\left\|x^{(i)}(t)\right\|e^{-\lambda_i t}\right], (i = \overline{1,n}.), q_2(t) \in Q,$$