

Resume

The sufficient condition on the first approach of the zero solution of the nonlinear differential equation was obtained.

Özet

Doğrusal olmayan diferansiyel denklemin sıfır çözümü ilk yaklaşım yeterli koşul elde edildi.

А.Тунгатаров,
Д.К.Ахмед-Закн.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ ПРЯМЫМИ

Пусть $0 < \varphi_0 \leq 2\pi$, $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_0$, $0 < R < \infty$ и $G = \{z = re^{i\varphi} : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0\}$. $W_p^1(G)$ - класс функций $f(z)$, для которых $\partial_{\bar{z}} f$, $\partial_z f \in L_p(G)$, $p \geq 1$ (см. [1]).

Рассмотрим в G уравнение

$$2\bar{z}a_1(\varphi)\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + 2za_2(\varphi)\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{r^\alpha a_3(\varphi)w}{|y - k_1x|^\alpha} + b(\varphi)\bar{w} = \frac{f(r, \varphi) \cdot r^\alpha}{|y - k_2x|^\alpha}, \quad (1)$$

где $a_1(\varphi)$, $a_2(\varphi)$, $a_3(\varphi)$, $b(\varphi) \in C[0, \varphi_0]$. Предполагается, что функция $f(r, \varphi)$ разлагается в ряд: $f(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\varphi)r^{vk}$, где $f_k(\varphi) \in C[0, \varphi_0]$, $0 < v \leq 1$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|_0 r^{vk}$ сходится в G .

Здесь $|f|_0 = \|f\|_{C[0, \varphi_0]}$; $k_1 = tg\varphi_1$, $k_2 = tg\varphi_2$, $0 < \alpha < 1$, $v > 0$ - действительные параметры.

Пусть $1 < p < \frac{1}{1-v}$, если $v < 1$ и $p \geq 1$, если $v \geq 1$. Решения уравнения (1) ищем в классе

$$W_p^1(G) \cap C(\bar{G}) \quad (2)$$

Если уравнение (1) разделить на $2\bar{z}a_1(\varphi)$, то оно становится уравнением с сингулярной точкой и линией. При $a_2(\varphi) \equiv 0$, $f(r, \varphi) \equiv 0$ и $\alpha = 0$ такое уравнение изучено в работах [2-5] и возникает при изучении бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с общей структурой в точке уплощения [6-8]. При $\alpha \neq 0$ уравнение (1) еще не изучено.

Используя формулы

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{e^{-i\varphi}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),$$

уравнение (1) записываем в полярной системе координат

$$r(a_1(\varphi) + a_2(\varphi))\frac{\partial w}{\partial r} + i(a_1(\varphi) - a_2(\varphi))\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{a_3(\varphi)w}{|\sin \varphi - k_1 \cos \varphi|^\alpha} + b(\varphi)\bar{w} = \frac{f(r, \varphi)}{|\sin \varphi - k_2 \cos \varphi|^\alpha} \quad (3)$$

Решения уравнения (3) из класса (2) ищем в виде

$$w(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(\varphi)r^{vk}, \quad (4)$$

где $w_k(\varphi)$, $(k = \overline{0, \infty})$ - пока неизвестные функции из класса $C^1[0, \varphi_0]$.

Функции $w_k(\varphi)$ подбираются так, чтобы ряд (4) и ряды, полученные из него дифференцированием по r и φ сходились в G .

Подставив вместо функций $w(r, \varphi)$ и $f(r, \varphi)$ их разложения в ряд по степеням r^ν в уравнение (3), а затем, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях r^ν , для каждого целого числа k имеем

$$i(a_1(\varphi) - a_2(\varphi))w'_k + (k\nu(a_1(\varphi) + a_2(\varphi)) + \frac{a_3(\varphi)}{|\sin \varphi - k_1 \cos \varphi|^\alpha})w_k + b(\varphi)\overline{w}_k = \frac{f_k(\varphi)}{|\sin \varphi - k_2 \cos \varphi|^\alpha}.$$

Отсюда следует, что при $a_1(\varphi) = a_2(\varphi)$ функция $w_k(\varphi)$ не является ограниченной в $[0, \varphi_0]$ и следовательно, не существует решения из класса (2) уравнения (3) в виде (4). Поэтому, предполагая, что $a_1(\varphi) \neq a_2(\varphi)$ из последнего уравнения получим

$$w'_k + A_k(\varphi) \cdot w_k = b_1(\varphi) \cdot \overline{w}_k + F_k(\varphi), \quad (5)$$

где

$$A_k(\varphi) = a_4(\varphi) - i\nu k a_5(\varphi), \quad a_4(\varphi) = \frac{-ia_3(\varphi)}{|\sin \varphi - k_1 \cos \varphi|^\alpha (a_1(\varphi) - a_2(\varphi))},$$

$$a_5(\varphi) = \frac{a_1(\varphi) + a_2(\varphi)}{a_1(\varphi) - a_2(\varphi)}, \quad b_1(\varphi) = \frac{ib(\varphi)}{a_1(\varphi) - a_2(\varphi)}, \quad F_k(\varphi) = -\frac{if_k(\varphi)}{|\sin \varphi - k_2 \cos \varphi|^\alpha \cdot (a_1(\varphi) - a_2(\varphi))}.$$

Используя преобразование

$$w_k = \psi_k \cdot \exp\left(\int_0^\varphi A_k(\gamma) d\gamma\right), \quad (6)$$

уравнение (5) записываем в виде:

$$\psi'_k = g_k(\varphi) \cdot \overline{\psi}_k + h_k(\varphi), \quad (7)$$

где

$$g_k(\varphi) = b_1(\varphi) \cdot \exp(-2i \int_0^\varphi \operatorname{Im} A_k(\gamma) d\gamma), \quad h_k(\varphi) = F_k(\varphi) \cdot \exp(-\int_0^\varphi A_k(\gamma) d\gamma).$$

Интегрируя уравнение (7), получим

$$\psi_k(\varphi) = \int_0^\varphi g_k(\gamma) \cdot \overline{\psi}_k(\gamma) d\gamma + \int_0^\varphi h_k(\gamma) d\gamma + c_k,$$

где c_k - произвольное комплексное число.

Так как $0 < \alpha < 1$, $a_1(\varphi) \neq a_2(\varphi)$, то интегралы, имеющиеся в правой части последнего уравнения, сходятся. Используя оператор

$$(B_k f)(\varphi) = \int_0^\varphi g_k(\gamma) f(\gamma) d\gamma,$$

последнее уравнение записываем в виде

$$\psi_k(\varphi) = (B_k \psi_1)(\varphi) + H_k(\varphi) + c_k, \quad (8)$$

$$\text{где } H_k(\varphi) = \int_0^\varphi h_k(\gamma) d\gamma$$

В дальнейшем используем следующие операторы

$$(B_k^0 f)(\varphi) = f(\varphi), \quad (B_k^n \psi)(\varphi) = (B(B_k^{n-1} \psi))(\varphi), \quad n = (\overline{1, \infty}),$$

$$I_{k,n}(\varphi) = \int_0^\varphi g_k(\gamma) \overline{I_{k,n-1}(\gamma)} d\gamma, \quad I_{k,1}(\varphi) = \int_0^\varphi g_k(\gamma) d\gamma, \quad n = \overline{(2, \infty)}.$$

Используя алгоритм нахождения многообразия решений, описанный в [2-5], имеем

$$\psi_k(\varphi) = \bar{c}_k P_{k,1}(\varphi) + c_k P_{k,2}(\varphi) + H_{k,1}(\varphi), \quad (9)$$

где

$$P_{k,1}(\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} I_{k,2j-1}(\varphi), \quad P_{k,2}(\varphi) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} I_{k,2j}(\varphi), \quad H_{k,1}(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} (B^j H_k)(\varphi)$$

Имеют место следующие равенства и оценки

$$P_{k,1}(0) = 0, \quad P_{k,2}(0) = 1, \quad H_{k,1}(0) = 0, \quad (10)$$

$$|(B_k^r \psi)(\varphi)| \leq |b_1|_0 \cdot |\psi|_0 \cdot \frac{(|b_1|_0 \cdot \varphi)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad |P_{k,1}(\varphi)| \leq |b_1|_0 \cdot ch(|b_1|_0 \cdot \varphi), \quad (11)$$

$$|P_{k,2}(\varphi)| \leq 1 + |b_1|_0 \cdot sh(|b_1|_0 \cdot \varphi), \quad |H_{k,1}(\varphi)| \leq |H_k|_0 \exp(|b_1|_0 \cdot \varphi),$$

где $|f|_0 = \|f\|_{C[0, \varphi_0]}$

Из (4), (6), (8) и (9) следует

$$w(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{ik} \cdot \exp\left(-\int_0^\varphi A_v(\gamma) d\gamma\right) \cdot (\bar{c}_k P_{k,1}(\varphi) + c_k P_{k,2}(\varphi) + H_{k,1}(\varphi)) \quad (12)$$

Здесь $c_k, k = \overline{(1, \infty)}$ подбираются так, чтобы ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^{ik}$ сходил. Пусть

$$\operatorname{Im} \left(\frac{a_1(\varphi) + a_2(\varphi)}{a_1(\varphi) - a_2(\varphi)} \right) = 0$$

Тогда в силу (11) формула (12) определяет решения уравнения (1) из класса (2) и справедлива следующая оценка

$$|w(r, \varphi)| \leq e_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^{ik} + e_2 \cdot \exp(|b_1|_0) \sum_{k=0}^{\infty} |H_k|_0 r^{ik},$$

$$\text{где } e_1 = \max_{0 \leq \varphi \leq \varphi_0} (|sh(|b_1|_0 \cdot \varphi)| + |ch(|b_1|_0 \cdot \varphi)| + 1), \quad e_2 = \max_{0 \leq \varphi \leq \varphi_0} \left| \int_0^\varphi \frac{\exp(a_4(\gamma)) d\gamma}{|\sin \gamma - k_2 \cos \gamma|^\alpha (a_1(\gamma) - a_2(\gamma))} \right|.$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Уравнение (1) при $a_1(\varphi) \neq a_2(\varphi)$ и $\operatorname{Im} a_5(\varphi) = 0$ имеет многообразие решений из класса (2), которые находятся по формуле (12).

Теперь рассмотрим задачу Коши.

Задача К. Требуется найти решение уравнения (1) из класса (2), удовлетворяющее начальным условиям

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k} w(r, \varphi) \Big|_{\substack{r=0 \\ \varphi=0}} = a_k, \quad k = \overline{(1, \infty)}, \quad (13)$$

где $\rho = r^v$, a_k - заданные числа, такие, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!}$ сходится.

Решение задачи. Подставив (12) в краевые условия (13), с учетом (10) получим

$$c_k = \frac{a_k}{k!}, \quad k = (0, \infty) \quad (14)$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. При $a_1(\varphi) \neq a_2(\varphi)$, $\operatorname{Im} a_5(\varphi) = 0$ задача К имеет единственное решение в виде (4), которое определяется по формулам (12) и (14).

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.
2. Тунгатаров А.Б., Бургумбасва С.К., Мукашева Д.К. Об одной системе уравнений в частных производных первого порядка типа Фукса на плоскости // Евразийский математический журнал. 2006. №3. – С. 58-67.
3. Тунгатаров А.Б., Мукашева Д.К. Об одной системе уравнений в частных производных первого порядка на плоскости с сингулярными коэффициентами / Труды международной научной конференции молодых ученых «Наука и образование 2007», 2007. – С. 249-252.
4. Тунгатаров А.Б., Мукашева Д.К. О некоторых краевых задачах для систем уравнений в частных производных первого порядка типа Фукса на плоскости // Евразийский математический журнал №1. 2007. – С. 73-84.
5. Тунгатаров А.Б. О непрерывных решениях уравнения Карлемана–Векуа с сингулярной точкой // ДАН СССР. 1991. Т. 319, №3. – С. 570-573.
6. Усманов З.Д. Бесконечно малые изгибания поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения // Differential Geometry. Banach Center Publications. 1984, –V. 12. –P. 241–272.
7. Усманов З.Д. О бесконечно малых изгибаниях поверхностей положительной кривизны с изолированной точкой уплощения // Математический сборник. 1970. –Т. 83 (125): 4 (12). –С. 596–615.
8. Усманов З.Д. Обобщенные системы Коши – Римана с сингулярной точкой. –Душанбе, 1993. –243 с.

Түйін

Мақалада сингулярлы сызықтары және дифференциалды бөлігінде Фуке операторы бар бірінші ретті дербес туындылы дифференциалды тендеулер жүйелерінің үзіліссіз шешімдері алынды. Осы жүйелер үшін Коши есебі шешілген.

Резюме

В статье получено многообразие непрерывных решений одного класса систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с оператором Фукса в дифференциальной части и с сингулярными прямыми. Для таких систем решена задача типа Коши.

Resume

In this article the continuous solutions of one class of first order partial differential equations with Fuks operator in a differential part and with singular lines is received. For such systems the Cauchy problem are solved.