

10. Дженалиев М.Т., Кальменов Т.Ш., Рамазанов М.И. // Материалы "Совещания Российско-Казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям" – Алматы: КазНУ им. аль-Фараби, 2009. С.162–167.

Түйін

Шектелген екі-өлшемді облыста Пуассон теңдеуі үшін Коши-Дирихле есебі қарастырылады. Зерттелуші корректті емес шекаралық есеп тиімді басқару есебіне сәйкестеледі. Түйіндес шекаралық есептің шешімі арқылы тиімділік шарттары табылған. Корректті емес шекаралық есеп үшін әлді шешілетіндігінің критеріі табылған.

Summary

In the bounded two-dimensional rectangular region we study Cauchy-Dirichlet problem for the Poisson equation. The studied ill-posed boundary value problem is reduced to an optimal control problem. The optimality conditions are stated with help of the solution of the adjoint boundary value problem. It is found a criterium of the strongly solvability of the incorrect boundary value problem.

Özet

Сınрлы ікі бойутлу дікдörtgen бөлgesіні біз Poisson denkleмі ішін Cauchy-Dirichlet probleмі eğitim.Çalışılan kötü poz sınır değер problemіне optimal bir kulla-nabilmenizi sorunu azalır.Eniyileme koşulları reklamın ortak sınır değер problemінің çözümü yardımı ile belirtilmiştir. Bu yanlış sınır değер problemінің güçlü çözülebilen bir kriter bulunur.

Т.М.Алдибеков,

доктор физика-математических наук,
профессор.

Казахский национальный университет
им. аль-Фараби.
Алматы/Казахстан

ОБ ОЦЕНКЕ И УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= A(t)y + f(t, y), (0 < t_0 \leq t < +\infty) \\ A(t) &\in C([t_0, +\infty)), \quad \|A(t)\| \leq a \quad \text{при} \quad t_0 \leq t < +\infty, \\ f(t, y) &\in C_{t,y}^{(0,1)}(D), D = \{t_0 \leq t < +\infty, y \in R^n\}, \quad f(t, 0) \equiv 0, \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(t, y)}{\|y\|} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - характеристические показатели Ляпунова [1] системы первого приближения,

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, (0 < t_0 \leq t < +\infty) \quad (2)$$

а $\beta_1, \dots, \beta_n$ - отвечающие им показатели второго порядка, которые определяются по нормальному базису формулой:

$$\beta_i = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{q_2(t)} \ln \left[\|x^{(i)}(t)\| e^{-\lambda_i t} \right], (i = \overline{1, n}), q_2(t) \in Q,$$

Q - класс положительных монотонно возрастающих к $+\infty$ при $t \uparrow +\infty$ кусочно-непрерывных функций, определенных в $[t_0, +\infty)$.

Определение. Линейная система (2) называется правильной относительно показателей второго порядка, если она правильная и выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{q_2(t)} \left[\int_{t_0}^t SpA(\tau) d\tau - t \sum_{k=1}^n \lambda_k \right] = \sum_{k=1}^n \beta_k$$

Теорема. Пусть линейная система первого приближения (2) нелинейной системы (1) правильная относительно показателей второго порядка и

$$\lambda_k \leq 0, \beta_k < -\frac{1}{m-1}, (k \in \{1, \dots, n\}, m > 1), \quad \|f(t, y)\| \leq c \|y\|^m, (c > 0),$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{q_2(t)}{t} = 0, \quad \int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{\exp(\delta q_2(\tau))} d\tau < +\infty, (\delta = 1 - \varepsilon > 0),$$

то решение $y = 0$, нелинейной системы (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \rightarrow +\infty$.

Обозначим через PA множество всех непрерывных матриц $B(t)$, $t \geq t_0 \geq 1$, которых удовлетворяют неравенству $\|\sqrt{t}B(t)\| \leq c$, ($c > 0$).

Легко проверяется следующее утверждение.

Лемма. Если в системе

$$\frac{dx}{dt} = [A + B(t)]x \quad (3)$$

A постоянная матрица $n \times n$ с простыми характеристическими корнями и $B(t) \in PA$, то линейная система (3) имеет нормальный базис с конечными показателями первого и второго порядков и является правильной.

Если $q_2(t) = \sqrt{t}$, то из теоремы вытекает:

Следствие. Если линейная система первого приближения (2) нелинейной системы (1) правильная относительно показателей второго порядка и

$$\lambda_k \leq 0, \beta_k < -\frac{1}{m-1}, (k \in \{1, \dots, n\}, m > 1), \quad \|f(t, y)\| \leq c \|y\|^m, (c > 0),$$

то решение $y = 0$, нелинейной системы (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \rightarrow +\infty$.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М.: 1966. – 576 с.

Түйін

Мақалада бейсызқты дифференциальдық теңдеулер жүйесі шешімінің асимптотикалық орнықтылығы қарастырылған.

Resume

The sufficient condition on the first approach of the zero solution of the nonlinear differential equation was obtained.

Özet

Doğrusal olmayan diferansiyel denklemin sıfır çözümü ilk yaklaşım yeterli koşul elde edildi.

А.Тунгатаров,
Д.К.Ахмед-Заки.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ ПРЯМЫМИ

Пусть $0 < \varphi_0 \leq 2\pi$, $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_0$, $0 < R < \infty$ и $G = \{z = re^{i\varphi} : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0\}$. $W_p^1(G)$ - класс функций $f(z)$, для которых $\partial_{\bar{z}} f$, $\partial_z f \in L_p(G)$, $p \geq 1$ (см. [1]).

Рассмотрим в G уравнение

$$2\bar{z}a_1(\varphi)\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + 2za_2(\varphi)\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{r^\alpha a_3(\varphi)w}{|y - k_1 x|^\alpha} + b(\varphi)\bar{w} = \frac{f(r, \varphi) \cdot r^\alpha}{|y - k_2 x|^\alpha}, \quad (1)$$

где $a_1(\varphi)$, $a_2(\varphi)$, $a_3(\varphi)$, $b(\varphi) \in C[0, \varphi_0]$. Предполагается, что функция $f(r, \varphi)$ разлагается в ряд: $f(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\varphi)r^{vk}$, где $f_k(\varphi) \in C[0, \varphi_0]$, $0 < v \leq 1$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|_0 r^{vk}$ сходится в G .

Здесь $|f|_0 = \|f\|_{C[0, \varphi_0]}$; $k_1 = tg\varphi_1$, $k_2 = tg\varphi_2$, $0 < \alpha < 1$, $v > 0$ - действительные параметры.

Пусть $1 < p < \frac{1}{1-v}$, если $v < 1$ и $p \geq 1$, если $v \geq 1$. Решения уравнения (1) ищем в классе

$$W_p^1(G) \cap C(\bar{G}) \quad (2)$$

Если уравнение (1) разделить на $2\bar{z}a_1(\varphi)$, то оно становится уравнением с сингулярной точкой и линией. При $a_2(\varphi) \equiv 0$, $f(r, \varphi) \equiv 0$ и $\alpha = 0$ такое уравнение изучено в работах [2-5] и возникает при изучении бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с общей структурой в точке уплощения [6-8]. При $\alpha \neq 0$ уравнение (1) еще не изучено.

Используя формулы

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{e^{-i\varphi}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),$$

уравнение (1) записываем в полярной системе координат

$$r(a_1(\varphi) + a_2(\varphi))\frac{\partial w}{\partial r} + i(a_1(\varphi) - a_2(\varphi))\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{a_3(\varphi)w}{|\sin \varphi - k_1 \cos \varphi|^\alpha} + b(\varphi)\bar{w} = \frac{f(r, \varphi)}{|\sin \varphi - k_2 \cos \varphi|^\alpha} \quad (3)$$

Решения уравнения (3) из класса (2) ищем в виде

$$w(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(\varphi)r^{vk}, \quad (4)$$