МРНТИ 27.29

Д.Б. Кабылкаев[1]*, Н.Қ. Құттығұл*[1]*, Ш.Е. Оразбақ*[1]
[1]Университет имени Сулеймана Демиреля
г. Алматы, Казахстан

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Аннотация. Поскольку дифференциальные уравнения — один из наиболее важных и наиболее часто применяемых разделов математики, его преподавание имеет большое значение. Понятно, что и развитие методики преподавания этого раздела имеет большую актуальность. В данной статье авторы рассматривают историю развития и становление теории дифференциальных уравнений и необходимость преподавания этого раздела математики в старших классах школ среднего образования. Авторы описывают те основные определения теории дифференциальных уравнений, которые необходимы школьникам для начального знакомства с таким разделом математики, как „дифференциальные уравнения“. В работе основное внимание уделено дифференциальным уравнениям первого порядка и уравнениям, которые допускают понижение порядка. Данные темы являются одним из важных разделов общей теории дифференциальных уравнений. Также на закрепление практической части представлены подробные решения задач по следующим темам: дифференциальные уравнения первого порядка и уравнения, допускающие понижение порядка.

Ключевые слова: теория дифференциальных уравнений, дифференциальное уравнение, порядок, решение дифференциального уравнения.

***

Аңдатпа. Бұл мақалада автор дифференциалдық теңдеулер теориясы дамыту және қалыптасу тарихын зерттейді. Негізгі бірінші ретті дифференциалдық теңдеулерді көрсететін дифференциалдық теңдеулер теориясының анықтамалары, бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер және деңгейін төмендете алатын теңдеулер көрсетілген,
яғни дифференциалдық теңдеулердің маңызды бөліктерінің бірі болып табылады, қорытынды бөлімінде болса, бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің шешімдері және деңгейін төмендете алатын теңдеулер көрсетілген.

Кілт сөздер: дифференциалдық теңдеулер теориясы, дифференциалдық теңдеулер, қарапайым дифференциалдық теңдеулер, дербес туындылы дифференциалдық теңдеу.

***

Abstract. In this article the authors consider the history of development and the formation of the theory of differential equations. The basic definitions of the theory of differential equations are described, the first-order differential equations are shown, and equations that allow decreasing order, which are one of the important sections of differential equations, are also solutions of problems for differential equations of the first order and equations that allow decreasing order.

Key words: differential equation theory, differential equation, ordinary differential equation, partial differential equation, differential equation order.

При изучении дифференциальных уравнений можно заметить, что данная тема затрагивается в высшей математики, многочисленных задачах естествознания, техники и механики, биологии, медицины и других отраслей научных знаний сводятся к математическому моделированию процессов в виде формулы, т.е. в виде функциональной зависимости. Так, например, переходные процессы в радиотехнике, кинетика химических реакций, динамика биологических популяций, движение космических объектов, модели экономического развития исследуются с помощью дифференциальных уравнений [1].

Определяющее влияние на становлении *теории дифференциальных уравнений* оказали труды великих ученых математиков:

1) Созданное Лейбницем и Ньютоном в 1462–1727г.г. «дифференциальное исчисление» (термин «дифференциальное уравнение» был предложен в 1676 году Лейбницем);

2) Работы Эйлера (1707–1783г.г.) и Лагранжа (1736–1813г.г.):«теория малых колебаний», «теория линейных систем дифференциальных уравнений», «собственные числа и векторы в *n*-мерном случае»;

3) Лаплас и Лагранж, а позже Гаусс в 1777–1855г.г. развивают «методы теории возмущений»;

4) Софус Ли (1842–1899г.г.), анализируя вопрос об интегрировании уравнений в квадратурах, пришел к необходимости подробно исследовать группы диффеоморфизмов — «группы Ли» (алгебры Ли еще раньше рассматривали Симеон-Дени Пуассон (1781–1840г.г.) и, особенно, Карл Густав Якоб Якоби (1804–1851г.г.));

5) Работы Анри Пуанкаре в 1854–1912г.г., созданная им «качественная теория дифференциальных уравнений», или теория динамических систем, вместе с теорией функций комплексных переменных легла в основу современной топологии (теория

динамических систем сейчас активно развивается и имеет важные применения в естествознании) [2, 552с.].

Первоначально дифференциальные уравнения возникли из задач механики, в которых требовалось определить координаты тел, их скорости и ускорения, рассматриваемые как функции времени при различных воздействиях. К дифференциальным уравнениям приводили также некоторые рассмотренные в то время геометрические задачи [2].

В данной статье показаны дифференциальные уравнения первого порядка и уравнения, допускающие понижение порядка, которые являются одним из важных разделов дифференциальных уравнений. Эти разделы дифференциальных уравнений широко применяются на практике в ВУЗ-ах, а также внесены в математику 12-летнего образования интеллектуальных школ.

Цель научной статьи — углубление знаний у обучающихся по разделу дифференциальных уравнений, а именно при решении задач на дифференциальные уравнения первого порядка и уравнения, допускающие понижение порядка.

Для достижения цели, авторами статьи, поставлены следующие задачи:

— Анализ истории развития теории дифференциальных уравнений;

— важность и значимость определений и формул дифференциальных уравнений, уравнений первого порядка и уравнения, допускающие понижение порядка;

— закрепление полученных знаний на практике, путем решения задач на дифференциальные уравнения первого порядка и уравнения, допускающие понижение порядка.

Для начала дадим определение понятию «дифференциальное уравнение»:

Дифференциальное уравнение — это уравнение, в которое входят производные функции, и может входить сама функция, независимая переменная и параметры. Порядок входящих в уравнение производных может быть различен. Производные и функции, независимые переменные и параметры могут входить в уравнение в различных комбинациях или все, кроме хотя бы одной производной, отсутствовать вовсе. Не любое уравнение содержащее производные неизвестной функции, является дифференциальным уравнением. Например: $f'(x) = f(f(x))$ не является дифференциальным уравнением.

Термин *дифференциальное уравнение* (выше сказано) был впервые введен Лейбницем в 1767 году для обозначения зависимости между дифференциалами dx и dy двух переменных x и y. Эта зависимость содержит переменные x и y вместе с другими символами a, b, c, …, которые являются постоянными [3, 16с.].

Такое ограниченное применение термина было вскоре заменено другим; в настоящее время под дифференциальными уравнениями понимаются любые алгебраические или трансцендентные равенства, содержащие дифференциалы или производные. Однако при этом подразумевается, что дифференциальное уравнение не является тождеством.

Некоторые важные определения необходимые при изучении раздела «дифференциальное уравнение»:

*Определение 1.1.*Уравнение называется *дифференциальным*, если, кроме независимых переменных и неизвестных функций этих переменных, оно содержит производные неизвестных функций (или их дифференциалы).

*Определение 1.2.*Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным,* если неизвестные функции зависят от одной независимой переменной.

*Определение 1.3.*Дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных,* если оно содержит несколько независимых переменных, функции этих переменных и частные производные этих функций.

Определение 1.4.Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной неизвестной функции, входящей в уравнение.

Определение 1.5.Решением дифференциального уравнения называется система функций, подстановка которых вместо неизвестных обращает уравнение в тождество.

*Определение 1.6.*В случае обыкновенных дифференциальных уравнений решения могут быть *общими, частными* и *особыми*.

Определение 1.7.Общими решениями дифференциальных уравнений называются решения, содержащие столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения.

Определение 1.8.Частными решениями дифференциальных уравнений называются решения, получающиеся из общих при частных значениях произвольных постоянных.

Определение 1.9.Особыми решениями дифференциальных уравнений называются решения, которые вообще не содержатся в общих решениях, т.е. не получаются из них при частных значениях произвольных постоянных. [4, 717с.].

Перейдем к теоретической части. Рассмотрим важные определения дифференциального уравнения первого порядка, которые закрепим на практике, ниже[5, 176с]:

Определение 2.1. Уравнение

$$y' + a(x)y = b(x)$$

называется линейным. Чтобы его решить, надо сначала решить уравнение

$$y' + a(x)y = 0$$

и в общем решении последнего заменить произвольную постоянную *C – const* на неизвестную функцию $C(x)$. Затем выражение, полученное для *y*, подставить в уравнение (1) и найти функцию $C(x)$.

Определение 2.2. Некоторые уравнения становятся линейными, если поменять местами искомую функцию и независимое переменное. Т.к. в это уравнение хи dxвходят линейно, то уравнение будет линейным, если хсчитать искомой функцией, а y–независимым переменным (решается аналогично уравнению (1)).

Определение 2.3. Чтобы решить уравнение Бернулли, т.е. уравнение

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \quad (n \neq 1),$$

надо обе его части разделить на y^n и сделать замену$\frac{1}{y^{n-1}} = z$. После замены получается линейное уравнение, которое можно решить изложенным выше способом.

Определение 2.4. Уравнение Риккати, т.е. уравнение

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x),$$

в общем случае не решается в квадратурах. Если же известно одно частное решение $y_1(x)$, то заменой $y = y_1(x) + z$, уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли и таким образом может быть решено в квадратурах.

Закрепим на практике дифференциальные уравнения первого порядка [5].

ПРИМЕР №1. Уравнение I-го порядка:

$$(1 - x^2)dy + xydx = 0$$

$$(1 - x^2)y' = -xy$$

$$(1 - x^2)y' = -xy$$

$$(x^2 - 1)y' = xy$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{(1 - x^2)}, \qquad x \neq \pm 1$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \times \frac{d(x^2 - 1)}{(1 - x^2)}$$

$$\ln y = \frac{1}{2} \times \ln|(x^2 - 1| + \ln C$$

$$y = C\sqrt{(x^2 - 1}$$

$$y^2 = C(x^2 - 1)$$

$$x = \pm 1$$

ПРИМЕР №2. Уравнение I-го порядка:

$y=(xy'+2y)^2$

$y=x^2y'^2+4xyy'+4y^2$

$x^2y'^2+4xyy'+4y^2-y=0$

$$y'=\frac{-4xy\pm\sqrt{16x^2y^2-4x^2(4y^2-y)}}{2x^2}$$

$$y'=\frac{-4xy\pm\sqrt{4x^2y}}{2x^2}$$

$$y'=\frac{-4xy\pm 2x\sqrt{y}}{2x^2}$$

$$y'=\frac{-2y\pm\sqrt{y}}{x}$$

$$\left[\begin{array}{l} y'=\dfrac{-2y+\sqrt{y}}{x} \\ y'=\dfrac{-2y-\sqrt{y}}{x}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{-2y+\sqrt{y}}=\dfrac{dx}{x} \\ \dfrac{dy}{-2y-\sqrt{y}}=\dfrac{dx}{x}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\ln\left(-2y+\sqrt{y}\right)=\ln x+\ln C \\ -\ln\left(-2y-\sqrt{y}\right)=\ln x+\ln C\end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{1-2\sqrt{y}}=Cx \\ \dfrac{1}{1+2\sqrt{y}}=Cx\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2\sqrt{y}=\dfrac{1}{Cx} \\ 1+2\sqrt{y}=\dfrac{1}{Cx}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{y}=1-\dfrac{1}{Cx} \\ 2\sqrt{y}=\dfrac{1}{Cx}-1\end{array}\right.$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2Cx}\right)^2 \\ y=\left(\dfrac{1}{2Cx}-\dfrac{1}{2}\right)^2\end{array}\right.$$

ПРИМЕР№3. Уравнение I-го порядка:

$y(y-xy')=\sqrt{x^4+y^4}$

$y=tx\ \ y'=t+t'x$

$tx(tx-x(t+t'x))=\sqrt{x^4+t^4x^4}$

$-tx\times t'x^2=\sqrt{x^4+t^4x^4}$

$-txt'=\sqrt{1+t^4}$

$$-xt\frac{dt}{dx}=\sqrt{1+t^4}$$

$$\frac{t}{\sqrt{1+t^4}}dt=-\frac{dx}{x}$$

Решим для начало левую часть:

$$\frac{t}{\sqrt{1+t^4}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{tdt}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{\sqrt{1+(t^2)^2}}=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+\sqrt{1+t^4}\right|$$

Решим правую часть:

$$-\frac{dx}{x}=-\ln Cx=\ln Cx^{-1}$$

Теперь сравним обе стороны:

$$\frac{1}{2}\ln\left|t^2+\sqrt{1+t^4}\right|=\ln Cx^{-1}$$

$$\ln\left|t^2+\sqrt{1+t^4}\right|=2\ln Cx^{-1}$$

$$\ln\left|t^2+\sqrt{1+t^4}\right|=\ln Cx^{-2}$$

$$t^2+\sqrt{1+t^4}=Cx^{-2}$$

Т.к. из $y=tx$ следует, что $t=\frac{y}{x}$, то получаем:

$$\frac{y^2}{x^2}+\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x^2}=\frac{C}{x^2};\quad y^2+\sqrt{x^4+y^4}=C$$

ПРИМЕР№4. Уравнение I-го порядка:

$$(x\cos y+\sin 2y)y'=1$$

Перепишем уравнение в виде:

$$x\cos y+\sin 2y=x'$$

$$x'-x\cos y=\sin 2y$$

Получили линейное уравнение относительно x. Решаем его стандартным методом:

$$x'-x\cos y=0$$

$$\frac{dx}{dy}=x\cos y$$

$$x=Ce^{\sin y}$$

$$x'=C'e^{\sin y}+C\cos y\,e^{\sin y}$$

$$C'e^{\sin y}+C\cos y\,e^{\sin y}-C\cos y\,e^{\sin y}=\sin 2y$$

$$C'e^{\sin y}=\sin 2y$$

$$C=\int e^{-\sin y}\sin 2y\,dy=2\int e^{-\sin y}\sin y\,d\sin y$$

$$=2e^{-\sin y}\sin y+2\int e^{-\sin y}dy=$$

$$=-2e^{-\sin y}\sin y-2e^{-\sin y}+C_1$$

$$x=Ce^{\sin y}-2\sin y-2=Ce^{\sin y}-2(\sin y+1)$$

$$x=Ce^{\sin y}-2(\sin y+1)$$

Рассмотрим важные определения дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка [5, 176с]:

Определение 3.1. Если в уравнение не входит искомая функция*y*, т.е. оно имеет вид $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0$, то порядок уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных, входящих в уравнение, т.е. сделав замену$y^{(k)} = z$.

Определение 3.2. Если в уравнение не входит независимое переменное *x*, т.е. уравнение имеет вид $F\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$, то порядок уравнения можно понизить, взяв за новое независимое переменное *y*, а за неизвестную функцию$y' = p(y)$.

Определение 3.3. Если уравнение однородно относительно *y*и его производных, т.е. не меняется при одновременной замене $y, y', y'', \dots$ на $ky, ky', ky'', \dots$, то порядок уравнения понижается подстановкой $y' = yz$, где *z* — новая неизвестная функция.

Определение 3.4. Порядок уравнения понижается, если оно является однородным относительно*x*и *y* в обобщенном смысле, т.е. не меняется от замены *x* на*kx*, *y*на$k^m y$ (при этом y'заменяется на $k^{m-1}y'$, y''- на $k^{m-2}y''$ и т.д.). Чтобы узнать, будет ли уравнение однородным, и найти число *m*, надо приравнять друг другу показатели степеней, в которых число *k*будет входить в каждый член уравнения после указанной выше замены.

Определение 3.5. Порядок уравнения легко понижается, если удается преобразовать уравнение к такому виду, чтобы обе его части являлись полными производными по *x*от каких-нибудь функций.

Закрепим на практике уравнения, допускающие понижение порядка [5].

ПРИМЕР №5. Уравнения, допускающие понижение порядка:

$2xy'y'' = y'^2 - 1$

$y' = z, \qquad y'' = z'$

$2xzz' = z^2 - 1$

$\dfrac{d(z^2 - 1)}{z^2 - 1} = \dfrac{dx}{x}$

$\ln|z^2 - 1| = \ln Cx$

$z^2 - 1 = Cx$

$z = \pm\sqrt{Cx + 1}$

$y' = \pm\sqrt{Cx + 1}$

$dy = \pm\sqrt{Cx + 1}dx$

$y = \pm\frac{2}{3C}(Cx+1)^{\frac{3}{2}} + \tilde{C}$

Ответ: $y = \pm\frac{2}{3C}(Cx+1)^{\frac{3}{2}} + \tilde{C}$

ПРИМЕР №6.Уравнения, допускающие понижение порядка:

$(y')^2 + 2yy'' = 0$

Сделаем замену $y' = p$

Тогда $y'' = pp'$. Исходное уравнение примет вид:

$p^2 + 2ypp' = 0$

$p(p + 2yp') = 0$

1) $p = 0 \to y' = 0 \to y = C$

2) $p + 2yp' = 0$

$2y\frac{dp}{dy} = -p$

$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}$

$\ln|p| = -\frac{1}{2}\ln|y| + C_1$

$p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$

$y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$

$\sqrt{y}dy = C_1dx$

$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C_1x + C_2$

$y^{1,5} = 1{,}5C_1x + 1{,}5C_2 = C_3x + C_4$

$y^3 = (C_1x + C_2)^2$. Возведем обе части в квадрат

Ответ:$y^3 = (C_1x + C_2)^2$, $y = C$, $C, C_1, C_2 \in R$

ПРИМЕР №7.Уравнения, допускающие понижение порядка:

$2y'(y'' + 2) = xy''^2$

$y' = z \to 2z(z' + 2) = xz'^2$

$z' = p;\ \ 2z(p+2) = xp^2;\ \ z = \frac{xp^2}{2(p+2)}$

$dz = pdx = \frac{p^2dx}{2(p+2)} + \frac{x(p^2 + 4p)dp}{2(p+2)^2}$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p+2}; \;\; p \neq 0; \;\; p \neq -2; \;\; p \neq -4$$

$$x = C_1(p+2); \;\; z = \frac{C_1 p^2}{2}; \;\; z(x) = \frac{(x - C_1)^2}{C_1}$$

Проверка частных решений:

$$p = 0 \rightarrow z = 0; \;\; p = -4 \rightarrow z = -4x$$

$$y = \int z dx$$

Ответ: $3C_1 y = (x - C_1)^3 + C_2; y = C; y = C - 2x^2$

Список использованной литературы:

1 Баврин И. И. Высшая математика: учебное пособие для студентов хим.- биол. фак. пед. Институтов / И. И. Баврин. – М.: Просвещение, 1980. – 383 с.

2 Макаров И.П., Виноградов И.М. Дифференциальные уравнения: Математическая энциклопедия / И.П. Макаров, И.М. Виноградов. – М.: Советская энциклопедия, 1979. – 552 с.

3 Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд – М.: «Наука», 1971. – 16 с.

4 Айнс Э.Л. Дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. Перевод с английского под редакцией А.М. Эфроса. – Харьков:ОНТИ. Государственное научно-техническое издательство Украины НКТП, 1939. – 717 с.

5 Филипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филипов. – Ижевск:НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 176 с.