УДК 51

Кулпешов Б.Ш.
Член корр НАН РК, професор Международного университет информационных технологий, Алматы, Казахстан
Алтаева А.Б.
Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК, Алматы, Казахстан

ВОПРОСЫ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ И НЕРАЗЛИЧИМОСТИ В СЛАБО ЦИКЛИЧЕСКИ МИНИМАЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ

Аннотация: В настоящей работе исследуются циклически упорядоченные структуры с условием слабой циклической минимальности. Найдены необходимые и достаточные условия неразличимости множества реализаций неалгебраического 1-типа в счетно категоричных слабо циклически минимальных структурах.

Данная статья направлена на рассмотрение понятия *слабой циклической минимальности*, введенного и первоначально глубоко исследованного, на вопросы неразличимости множества в слабо циклически минимальных структурах. В работе приводится в терминах слабой ортогональности выпуклых компонент неалгебраического 1-типа критерий неразличимости множества реализаций данного типа для счетно категоричных не 1-транзитивных слабо циклически минимальных структур, приводятся различные теоремы по данному вопросу и варианты их решения.

Ключевые слова: циклические упорядочные системы, неразличимость множества, слабо циклические минимальные структуры.

1. Предварительные сведения

Пусть $M = \langle M, =, < \rangle$ – линейный порядок. Если мы соединим два конца линейно упорядоченного множества M (возможно, это $-\infty$ и $+\infty$), то получим циклический порядок.

Более формально, *циклический порядок* описывается тернарным отношением K, которое удовлетворяет следующим условиям:

(co1) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (K(x, y, z) \to K(y, z, x))$;

(co2) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (K(x, y, z) \wedge K(y, x, z) \Leftrightarrow x = y \vee y = z \vee z = x)$;

(co3) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (K(x, y, z) \to \forall t\ [K(x, y, t) \vee K(t, y, z)])$;

(co4) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (K(x, y, z) \vee K(y, x, z))$.

Следующее наблюдение связывает линейные и циклические порядки.

Теорема 1.1.[1] (i) Если $\langle M, \leq \rangle$ есть линейное упорядочение и K есть тернарное отношение,получаемое из $\leq$ по правилу $K(x, y, z) :\Leftrightarrow (x \leq y \leq z) \vee (z \leq x \leq y) \vee (y \leq z \leq x)$, то K естьотношение циклического порядка на M.

(ii)Если $\langle N, K \rangle$ есть циклическое упорядочение и $\alpha \in N$, то отношение $\leq_a$, определяемое на $M := N \setminus \{\alpha\}$ по правилу $y \leq_a z :\Leftrightarrow K(a, y, z)$, является линейным порядком.Более того, если мы расширяем этот линейный порядок до порядка, обозначаемого $\leq'$, на N, добавляя, что $a \leq' b$ для всех $b \in M$, то получаемое отношение циклического порядка является исходным циклическим порядком K.

Настоящая работа касается понятия *слабой циклической минимальности*, введенного и первоначально глубоко исследованного в [2]. *Слабо циклически минимальной структурой* называется циклически упорядоченная структура $M = \langle M; =, K, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Напомним (см. [3]), что такая структура M называется *циклически минимальной*, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов и точек в M. Таким образом, слабая циклическая минимальность является обобщением циклической минимальности. Здесь мы исследуем вопросы неразличимости множества в слабо циклически минимальных структурах. В работе приводится в терминах слабой ортогональности выпуклых компонент неалгебраического 1-типа критерий неразличимости множества реализаций данного типа для счетно категоричных не 1-транзитивных слабо циклически минимальных структур (Теорема 2.1).

Предложение 1.2.[2] Пусть $M = \langle M; =, K, ... \rangle$ – слабо циклически минимальная структура, и пусть b – произвольный элемент структуры M. Определим отношение $\leq_b$ на $M \setminus \{b\}$ и $\leq'_b$ на M как в Теореме 1.1.

(i) Пусть M_b – структура с универсумом $M \setminus \{b\}$, порядком $\leq_b$, и символом отношения для каждого $\{b\}$-определимого отношения структуры M на $M \setminus \{b\}$. Тогда M_b является слабо о-минимальной структурой.

(ii) Пусть $\hat{M}_b$ – структура с универсумом M, порядком $\leq'_b$, и символом отношения для каждого $\{b\}$-определимого отношения структуры M на ее степенях. Тогда $\hat{M}_b$ также является слабо о-минимальной.

Факт 1.3.[2] Пусть M – слабо циклически минимальная структура, $\phi(x)$ – произвольная $\varnothing$-определимая формула. Тогда для любого $a \in M$ $\phi(M)$ является объединением конечного числа $\{a\}$-определимых выпуклых множеств.

Обозначение 1.4. (1) $K0(x, y, z) := K(x, y, z) \wedge y \neq x \wedge y \neq z \wedge x \neq z$.

(2) $K(u1, ..., un)$ обозначает формулу, говорящую, что все подкортежи кортежа $\langle u1, ..., un \rangle$ (в возрастающем порядке) удовлетворяют K; аналогичные обозначения для $K0$.

(3) Пусть A, B, C – попарно непересекающиеся выпуклые подмножества циклически упорядоченной структуры M. Будем писать $K(A, B, C)$, если для любых a, b, $c \in M$ всякий раз, когда $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ мы имеем $K(a, b, c)$. Мы расширяем данное обозначение естественным образом, например, употребляя следующую запись $K0(A, b, C, D)$.

Определение 1.5. [2] Пусть M – циклически упорядоченная структура.

(i) Пусть $p \in S1(\varnothing)$. Будем говорить, что p является *n-выпуклым*, если для любого элементарного расширения N структуры $Mp(N)$ является непересекающимся объединением n максимальных выпуклых множеств (которые называются *выпуклыми компонентами* множества $p(N)$). Будем говорить, что p является *выпуклым*, если p является 1-выпуклым. В противном случае, будем говорить, что p – *невыпуклый.*

(ii) Будем говорить, что M является *n-выпуклой*, если каждый тип $p \in S1(\varnothing)$ является n-выпуклым, и мы говорим что $Th(M)$ является *n-выпуклой*, если это имеет место для всех $N \equiv M$.

Ранее была доказана следующая теорема:

Теорема 1.6. [2] Пусть M – слабо циклически минимальная структура. Тогда существует $n < \omega$ такой, что M – n-выпуклая.

В качестве следствия мы получаем в частности, что если M – слабо циклическая минимальная структура и $p \in S1(\varnothing)$, то $p(M)$ является объединением конечного числа выпуклых множеств.

Пусть $p \in S1(\varnothing)$ и $F(x, y)$ – $\varnothing$-определимая формула такая, что для каждого $b \in p(M)$ $F(M, b)$ – выпуклое бесконечное кобесконечное множество, $F(M, b) \subset p(M)$. Пусть $F\ l(y)$ – формула, говорящая, что y является левой концевой точкой множества $F(M, y)$:

$$\exists z1\ \exists z2\ [K0(z1, y, z2) \wedge \forall t1 (K(z1, t1, y) \wedge t1 \neq y \to \neg F(t1, y)) \wedge \\ \forall t2\ (K(y, t2, z2) \wedge t2 \neq y \to F(t2, y))].$$

Мы говорим, что $F(x, y)$ является *p-стабильнойвыпуклой вправо*, если для любого элемента $b \in p(M)$ $M \models \forall x\, [F(x, b) \to F\, l(b) \wedge \forall z\, (K(b, z, x) \to F(z, b))]$

Пусть $F1(x, y)$, $F2(x, y)$ – произвольные выпуклые вправо формулы. Будем говорить, что *F2 больше чем F1*, если существует $a \in p(M)$ такой, что $F1(M, a) \subset F2(M, a)$. Это дает тотальное упорядочение на (конечном) множестве всех p-стабильных выпуклых вправо формул $F(x, y)$ (рассматриваемых по модулю эквивалентности $Th(M)$). Будем писать $f(y) := \text{rend} F(M, y)$, подразумевая что $f(y)$ является правой концевой точкой множества $F(M, y)$, которая лежит в определимом пополнении $\overline{M}$ структуры M. Тогда f является функцией, которая отображает $p(M)$ в $\overline{M}$. Аналогично мы можем рассмотреть p-стабильные выпуклые влево формулы и писать $f(y) := lend\, F(M, y)$, подразумевая что $f(y)$ является левой концевой точкой множества $F(M, y)$, которая также лежит в общем случае в определимом пополнении $\overline{M}$ структуры M.

Пусть $F(x, y)$ – p-стабильная выпуклая вправо формула. Слегка адаптируя определение из [4], будем говорить, что $F(x, y)$ является *эквивалентность-генерирующей*, если для любых $\alpha, \beta \in p(M)$ таких, что $M \models F(\beta, \alpha)$, имеет место следующее:

$$M \models \forall x (K(\beta, x, \alpha) \wedge x \neq \alpha \to [F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)])$$

Лемма 1.7. [5] Пусть M – счетно категоричная слабо циклически минимальная структура, $p \in S_1(\varnothing)$ – неалгебраический, $F(x, y)$ – p-стабильная выпуклая вправо формула, являющаяся эквивалентность-генерирующей. Тогда существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.

Теорема 1.8. [5] ПустьM – счетно категоричная слабо циклически минимальная структура, не являющаяся 1-транзитивной, $p \in S1(\varnothing)$ – неалгебраический. Тогда любаяp-стабильная выпуклая вправо формула является эквивалентность-генерирующей.

Пусть f – унарная функция в $\overline{M}$ с областью определения $Dom(f) = I \subseteq M$, где I – открытое выпуклое множество. Мы говорим, что f является *монотонной вправо (влево)* на I, если она сохраняет (обращает) отношение K_0, т.е. для любых $a, b, c \in I$ таких, что $K_0(a, b, c)$, мы имеем $K_0(f(a), f(b), f(c))$ ($K_0(f(c), f(b), f(a))$).

Факт 1.9. Пусть M – счетно категоричная не 1-транзитивная слабо циклически минимальная структура, $p \in S_1(\varnothing)$ – неалгебраический, $RC(p) = 1$. Тогда любая функция f, область определения которой содержит $p(M)$, является строго монотонной или константой на $p(M)$.

2. *Результаты*

Пусть $A \subseteq M, p \in S_1(A)$ – неалгебраический, $n \in \omega, n \geq 3$. Вспомним, что в случае когда $A \neq \varnothing$ множество $p(M)$ выпукло. В случае же, когда $A = \varnothing$, $p(M)$ может быть как выпуклым, так и невыпуклым. Будем рассматривать случай, когда $p(M)$ не выпукло. Очевидно в этом случае $A = \varnothing$ и существует $m > 1$ такой, что $p(M)$ разбивается на m выпуклых компонент, т.е. $p(M) = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$, где каждое U_i выпукло. Предположим что $K_0(U_1, \ldots, U_m)$. Будем говорить, что $p(M)$ – *2-неразличимо над*$\varnothing$, если для любых $\langle a_1, a_2 \rangle$, $\langle a'_1, a'_2 \rangle \in [p(M)]^2$ таких, что $a_1 \neq a_2, a'_1 \neq a'_2$ и либо существует $i \in \{1, \ldots, m\}$ такой, что $K(a_1, M, a_2) \subseteq U_i$ и $K(a_1', M, a_2') \subseteq U_i$, либо для некоторых $i, j \in \{1,...,m\}$ с условием $i \neq j$ $a_1, a_1' \in U_i, a_2, a_2' \in U_j$, следует что $tp(\langle a_1, a_2 \rangle / \varnothing) = tp(\langle a_1', a_2' \rangle / \varnothing)$.

Будем говорить, что $p(M)$ – n*-неразличимо над* $\varnothing$, если для любых $n, k, n_1, ..., n_k$ и $i_1, ..., i_k$ таких, что $k \leq m, n_1 + ... + n_k = n$ и $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq m$, и любых n-кортежей $\overline{a} = \langle a_1^{i_1}, ..., a_{n_1}^{i_1}; a_1^{i_2}, ..., a_{n_2}^{i_2}; ...; a_1^{i_k}, ..., a_{n_k}^{i_k} \rangle, \overline{b} = \langle b_1^{i_1}, ..., b_{n_1}^{i_1}; b_1^{i_2}, ..., b_{n_2}^{i_2}; ...; b_1^{i_k}, ..., b_{n_k}^{i_k} \rangle \in [p(M)]^n$ таких, что $a_j^{i_s}, b_j^{i_s} \in U_{i_s}$ для всех $j \in \{1, ..., n_s\}$ и $s \in \{1, ..., k\}$, $K_0(a_1^{i_1}, ..., a_{n_k}^{i_k})$ и $K_0(b_1^{i_1}, ..., b_{n_k}^{i_k})$, следует что $tp(\overline{a} / \varnothing) = tp(\langle \overline{b} / \varnothing)$.

Будем также говорить, что $p(M)$ – *неразличимо над* A, если для каждого $n \in \omega$ $p(M)$ – n-неразличимо над A.

Поскольку $p(M)$ не выпукло, то существует $m > 1$ такой, что $p(M)$ разбивается на m выпуклых компонент, т.е. $p(M) = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$, где каждое U_i выпукло. Пусть $B \subseteq M$, B – конечно, $s \leq m$. Будем говорить, что семейство выпуклых компонент $\{U_1, ..., U_s\}$ типа p *слабо ортогонально над* B, если каждый s-кортеж $\langle a_1, ..., a_s \rangle \in U_1 \times ... \times U_s$ удовлетворяет одному и тому же типу над B. Будем говорить что семейство выпуклых компонент $\{U_1, ..., U_s\}$ типа p *ортогонально над* B, если для любой последовательности $(n_1, n_2, ..., n_s) \in \omega^s$ каждый $(n_1 + n_2 + ... + n_s)$-кортеж $\langle a_1^1, a_1^2, ..., a_1^{n_1}; ...; a_s^1, a_s^2, ..., a_s^{n_s} \rangle \in (U_1)^{n_1} \times ... \times (U_s)^{n_s}$ с условием $K_0(a_1^1, a_1^2, ..., a_1^{n_1}; ...; a_s^1, a_s^2, ..., a_s^{n_s})$ удовлетворяет одному и тому же типу над B.

Следующая теорема является критерием неразличимости множества реализаций неалгебраического 1-типа ранга выпуклости 1 в счетно категоричной m-выпуклой слабо циклически минимальной структуре, где $m > 1$.

Теорема 2.1. Пусть M – счетно категоричная m-выпуклая слабо циклически минимальная структура, $m > 1$, $p \in S_1(\varnothing)$ – неалгебраический, $RC(p) = 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $p(M)$ – неразличимо над $\varnothing$;

(2) Семейство всех выпуклых компонент типа p попарно слабо ортогонально над $\varnothing$.

Мы докажем ряд утверждений, которые будут кульминировать в доказательстве Теоремы 2.1.

Лемма 2.2. Пусть M – счетно категоричная слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, A – конечно, $p \in S_1(A)$ – неалгебраический, $RC(p) = 1$. Тогда $p(M)$ – неразличимо над A.

Доказательство Леммы 2.2. Поскольку $RC(p) = 1$, то не существует нетривиальной p-стабильной выпуклой вправо формулы, и поэтому $p(M)$ – 2-неразличимо над A.

Предположим, что мы уже доказали n-неразличимость $p(M)$ над A. Докажем теперь, что $p(M)$ является $n+1$-неразличимым над A. Возьмем произвольные $a_1, a_2, ..., a_n \in p(M)$ такие, что $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Так как $p(M)$ n-неразличимо над A, то множество $p(M) \cap \{a \in M \mid a > a_{n-1}\}$ является 1-неразличимым над $A \cup \{a_1, ..., a_{n-1}\}$. Следовательно, существует 1-тип $p' \in S_1(A \cup \{a_1, ..., a_{n-1}\})$ такой, что $p'(M) = p(M) \cap \{a \in M \mid a > a_{n-1}\}$. Очевидно что $RC(p') = 1$ и, следовательно, $p'(M)$ 2-неразличимо над $A \cup \{a_1, ..., a_{n-1}\}$. Таким образом, множество $p(M) \cap \{a \in M \mid a > a_n\}$ является 1-неразличимым над $A \cup \{a_1, ..., a_n\}$, и, следовательно, $p(M)$ $n+1$-неразличимо над A.

Лемма 2.3. Пусть M – счетно категоричная слабо циклически минимальная структура, $A \subseteq M$, A – конечно, $A \neq \varnothing$, $p \in S_1(A)$ – неалгебраический, $RC(p)=1$. Тогда $p(M)$ – неразличимо над A.

Предложение 2.4. Пусть M – счетно категоричная m-выпуклая слабо циклически минимальная структура, $m>1$, $p \in S_1(\varnothing)$ – неалгебраический, $RC(p)=1$. Тогда каждая выпуклая компонента типа p является неразличимым множеством над $\varnothing$.

Доказательство Предложения 2.4. В силу m-выпуклости M $p(M)=\bigcup_{i=1}^{m} U_i^p$. Не умаляя общности, можем считать, что $K_0(U_1^p, U_2^p, ..., U_m^p)$ (если $m=2$, то поскольку M – не 1-транзитивная, то существует $q \in S_1(\varnothing)$ такой, что $q \neq p$ и, следовательно, мы имеем $K_0(U_1^p, U_1^q, U_2^p, U_2^q)$). Поймем вначале, что U_i^p – 2-неразличимо над $\varnothing$ для каждого $1 \le i \le m$. Допустим противное: существуют $\langle a_1, a_2\rangle, \langle b_1, b_2\rangle \in [U_i^p]^2$ такие, что $a_1 \neq a_2$, $b_1 \neq b_2$, $K(a_1, M, a_2) \subseteq U_i^p$, $K(b_1, M, b_2) \subseteq U_i^p$ и $tp(\langle a_1, a_2\rangle/\varnothing) \neq tp(\langle b_1, b_2\rangle/\varnothing)$. Следовательно, существует $\varnothing$-определимая формула $\phi(x,y)$ такая, что $M \models \phi(a_1,a_2) \wedge \neg\phi(b_1,b_2)$. В силу 1-неразличимости U_i^p над $\varnothing$ существует $g \in Aut(M)$ такой, что $g(b_1)=a_1$. Поскольку

$$M \models \exists x \exists y[U^p(x) \wedge \neg U^p(y) \wedge K(b,x,y) \wedge \forall t(K(b,t,x) \rightarrow U^p(t)) \wedge \neg\phi(b_1,x)]$$

то существует $a_2' \in U_i^p$ такой, что $K(a_1, M, a_2')$ и $\neg\phi(a_1, a_2')$. В силу слабой циклической минимальности M можем считать, что $\phi(a_1, M)$ выпукло. Тогда рассмотрим следующую формулу: $F(x,a_1):=\exists t[\phi(a_1,t) \wedge K(a_1,x,t)]$. Можно понять, что $F(x,y)$ – p-стабильная выпуклая вправо формула. Тогда $F(x,y)$ является эквивалентность-генерирующей, и, следовательно, существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, откуда $RC(p) \ge 2$, противореча условию леммы. Следовательно, для каждого $1 \le i \le m$ U_i^p – 2-неразличимо над $\varnothing$. Возьмем произвольные элементы $a_1 \in U_i^p$ и $b \in M \setminus p(M)$ (в силу m-выпуклости M такой элемент b обязательно существует). Тогда в силу 2-неразличимости U_i^p над $\varnothing$ множество $U_i^p \cap \{a \in p(M) \mid K_0(a_1, a, b)\}$ является 1-неразличимым над $\{a_1\}$. Это множество является $\{a_1\}$-определимым и выделяется следующей формулой:

$$\phi(a_1,x):=U^p(x) \wedge \exists y[\neg U^p(y) \wedge K_0(a_1,x,y)]$$

где $U^p(x)$ определяет тип p. Следовательно, существует $p' \in S_1(\{a_1\})$ такой, что $p'(M)=\phi(a_1,M)$. Очевидно что $RC(p')=1$, откуда в силу Леммы 2.3 $p'(M)$ неразличимо над $\{a_1\}$. Тогда в силу произвольности выбора a_1 заключаем, что U_i^p неразличимо над $\varnothing$.

Лемма 2.5. Пусть M – счетно категоричная слабо циклически минимальная структура, $A \subseteq M$, A – конечно, $A \neq \varnothing$, $p_1, p_2, ..., p_s \in S_1(A)$ – неалгебраические, $RC(p_i)=1$ для каждого $1 \le i \le s$. Предположим что $\{p_1, p_2, ..., p_s\}$ слабо ортогонально над A. Тогда оно ортогонально над A.

Предложение 2.6. Пусть M – счетно категоричная m-выпуклая слабо циклически минимальная структура, $m>1$, $p \in S_1(\varnothing)$ – неалгебраический, $RC(p)=1$, и пусть $p(M)=\bigcup_{i=1}^{m} U_i$, где каждое U_i является выпуклой компонентой типа p. Предположим, что для некоторого $s \leq m$ $\{U_1, U_2, ..., U_s\}$ – слабо ортогонально над $\varnothing$. Тогда оно ортогонально над $\varnothing$.

Доказательство Предложения 2.6. Будем доказывать индукцией по $s \geq 1$. Случай $s = 1$ является тривиальным, так как в силу Предложения 2.4 каждая выпуклая компонента U_i является неразличимым множеством над $\varnothing$. Предположим что заключение леммы установлено для семейств из s выпуклых компонент, и докажем это для семейств из $s+1$ выпуклой компоненты $\{U_1, U_2, ..., U_s, U_{s+1}\}$. Не умаляя общности, будем считать, что $K_0(U_1, U_2, ..., U_s, U_{s+1})$ и формула $U^p(x)$ изолирует тип p. Предположим также для определенности, что между U_s и U_{s+1} существует k выпуклых компонент типа p для некоторого $0 \leq k \leq m-s-1$. Возьмем произвольный s-кортеж $\langle a_1, a_2, ..., a_s\rangle \in U_1 \times U_2 \times ... \times U_s$. В силу слабой ортогональности $\{U_1, U_2, ..., U_s, U_{s+1}\}$ множество U_{s+1} 1-неразличимо над $\{a_1, a_2, ..., a_s\}$, и следовательно в силу Леммы 2.5 U_{s+1} n-неразличимо над $\{a_1, a_2, ..., a_s\}$ для каждого $n \in \omega$. Возьмем произвольный $n_{s+1} < \omega$ и произвольный n_{s+1}-кортеж $\overline{a}_{s+1} = \langle a^1_{s+1}, a^2_{s+1}, ..., a^{n_{s+1}}_{s+1}\rangle \in [U_{s+1}]^{n_{s+1}}$ с условием $K_0(a^1_{s+1}, a^2_{s+1}, ..., a^{n_{s+1}}_{s+1})$ и докажем что $\{U_1, U_2, ..., U_s\}$ слабо ортогонально над $\{a^1_{s+1}, a^2_{s+1}, ..., a^{n_{s+1}}_{s+1}\}$. Если это не так, то существуют $\overline{a} = \langle a_1, a_2, ..., a_s\rangle, \overline{a}' = \langle a'_1, a'_2, ..., a'_s\rangle \in U_1 \times U_2 \times ... \times U_s$ такие что $tp(\overline{a}/\{\overline{a}_{s+1}\}) \neq tp(\overline{a}'/\{\overline{a}_{s+1}\})$. Тогда существует $\varnothing$-определимая формула $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ так что $M \models \phi(\overline{a}, \overline{a}_{s+1}) \wedge \neg\phi(\overline{a}', \overline{a}_{s+1})$. Поймем что существует $\overline{a}'_{s+1} = \langle (a^1_{s+1})', (a^2_{s+1})', ..., (a^{n_{s+1}}_{s+1})'\rangle \in [U_{s+1}]^{n_{s+1}}$ такой, что $K_0((a^1_{s+1})', (a^2_{s+1})', ..., (a^{n_{s+1}}_{s+1})')$ и $\neg\phi(\overline{a}, \overline{a}'_{s+1})$. Если такого кортежа не существует, то

$$M \models \theta(\overline{a}),$$

где

$$\theta(\overline{x}) := \forall y_1 ... \forall y_{n_{s+1}} [K_0(y_1, ..., y_{n_{s+1}}) \wedge \forall t(K(y_1, t, y_{s+1}) \to U^p(t)) \wedge \exists z_1 ... \exists z_k \exists t_1 ... \exists t_{k+1} (\wedge_{i=1}^{k} U^p(z_i) \wedge$$
$$\wedge \wedge_{i=1}^{k+1} \neg U^p(t_i)) \wedge K_0(x_s, t_1, z_1, t_2, z_2, ..., t_k, z_k, t_{k+1}, y_1)] \to \phi(\overline{x}, y_1, ..., y_{n_{s+1}})]$$

Так как $\{U_1, U_2, ..., U_s\}$ слабо ортогонально над $\varnothing$, то $M \models \theta(\overline{a}')$, противореча нашему допущению. Следовательно, $M \models \phi(\overline{a}, \overline{a}_{s+1}) \wedge \neg\phi(\overline{a}, \overline{a}'_{s+1})$, противореча n_{s+1}-неразличимости U_{s+1} над $\{a_1, a_2, ..., a_s\}$. Таким образом, $\{U_1, U_2, ..., U_s\}$ слабо ортогонально над $\{a^1_{s+1}, a^2_{s+1}, ..., a^{n_{s+1}}_{s+1}\}$. Тогда существуют 1-типы $p'_1, ..., p'_s \in S_1(\{a^1_{s+1}, a^2_{s+1}, ..., a^{n_{s+1}}_{s+1}\})$ такие, что $p'_i(M) = U_i$ для каждого $1 \leq i \leq s$. Тогда в силу Леммы 2.5 $\{U_1, U_2, ..., U_s\}$ ортогонально над $\{a^1_{s+1}, a^2_{s+1}, ..., a^{n_{s+1}}_{s+1}\}$. В силу произвольности $\overline{a}_{s+1} = \langle a^1_{s+1}, a^2_{s+1}, ..., a^{n_{s+1}}_{s+1}\rangle \in [U_{s+1}]^{n_{s+1}}$ заключаем что $\{U_1, U_2, ..., U_s, U_{s+1}\}$ ортогонально над $\varnothing$.

Предложение 2.7. Пусть M – счетно категоричная m-выпуклая слабо циклически минимальная структура, $m > 1$, $p \in S_1(\varnothing)$ – неалгебраический, $RC(p) = 1$, $\{U_1, U_2, ..., U_s\}$ – семейство попарно слабо ортогональных выпуклых компонент типа p для некоторого $s \leq m$. Тогда $\{U_1, U_2, ..., U_s\}$ слабо ортогонально над $\varnothing$.

Доказательство Предложения 2.7. Будем доказывать индукцией по $s \geq 2$. Шаг $s = 2$ является тривиальным.

Шаг $s = 3$. Допустим противное: предположим что $\{U_1, U_2, U_3\}$ не является слабо ортогональным над $\varnothing$. Тогда существуют кортежи $\langle a_1, a_2, a_3\rangle, \langle b_1, b_2, b_3\rangle \in U_1 \times U_2 \times U_3$ такие что $tp(\langle a_1,a_2,a_3\rangle/\varnothing)\neq tp(\langle b_1,b_2,b_3\rangle/\varnothing)$. Следовательно, существует $\varnothing$-определимая формула $\phi(x_1,x_2,x_3)$ такая что $M\models\phi(a_1,a_2,a_3)\wedge\neg\phi(b_1,b_2,b_3)$. Поймем что существует $a_3''\in U_3$ такой что $M\models\neg\phi(a_1,a_2,a_3'')$. Допустим противное, т.е. $M\models\forall y[U_3(y,a_1)\to\phi(a_1,a_2,y)]$, где $U_3(y,a_1)$ – $\{a_1\}$-определимая формула, так что $U_3(M,a_1)=U_3$ (в силу Факта 1.3 такая формула существует). Но по индукционному предположению $tp(\langle a_1,a_2\rangle/\varnothing)=tp(\langle b_1,b_2\rangle/\varnothing)$, противореча нашему допущению. Таким образом, существует кортеж $\langle a_1,a_2\rangle\in U_1\times U_2$ и существуют $a_3',a_3''\in U_3$ такие что $M\models\phi(a_1,a_2,a_3')\wedge\neg\phi(a_1,a_2,a_3'')$. В силу слабой циклической минимальности M будем считать что $\phi(a_1,a_2,M)$ выпукло, $\phi(a_1,a_2,M)\subset U_3$ и $lend\,\phi(a_1,a_2,M)=lend\,U_3$, откуда, в частности, следует что $K_0(a_1,a_2,a_3',a_3'')$.

Пусть $f_{a_1}(y):=rend\,\phi(a_1,y,M), g_{a_2}(x):=rend\,\phi(x,a_2,M)$. Так как U_2 остается 1-неразличимым над $\{a_1\}$, то $f_{a_1}(y)$ не меняет своего поведения на всем U_2, и поэтому должна быть либо монотонной вправо, либо монотонной влево, либо константой на всем U_2. Если $f_{a_1}(y)$ была бы константой, тогда бы выпуклые компоненты U_1 и U_2 не были слабо ортогональны. Аналогично те же рассуждения для U_1 и $g_{a_2}(x)$. Так как U_1 – 1-неразличимо над $\varnothing$ в M, то если $f_{a_1}(y)$ монотонная вправо на U_2, то и для любого $a_1'\in U_1$ $f_{a_1'}(y)$ монотонная вправо на U_2.

Случай 1. $f_{a_1}(y)$ – монотонная вправо на U_2, $g_{a_2}(x)$ – монотонная вправо на U_1.

Пусть $U_2(y,a_1)$ – $\{a_1\}$-определимая формула, так что $U_2(M,a_1)=U_2$. Возьмем $b_1\in U_1$ такой что $K(a_1,M,b_1)\subseteq U_1$ и рассмотрим следующие формулы:

$$\Phi_1(y):=U_2(y,a_1)\wedge\forall z[\phi(a_1,a_2,z)\to\phi(b_1,y,z)]$$
$$\Phi_2(y):=U_2(y,a_1)\wedge\forall y_1\forall z[\neg\Phi_1(y_1)\wedge U_2(y_1,a_1)\wedge\phi(a_1,y_1,z)\to\phi(b_1,y,z)]$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Phi_n(y):=U_2(y,a_1)\wedge\forall y_1\forall z[\neg\Phi_{n-1}(y_1)\wedge U_2(y_1,a_1)\wedge\phi(a_1,y_1,z)\to\phi(b_1,y,z)]$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Докажем что $\Phi_1(M)\subset\Phi_2(M)\subset\ldots\subset\Phi_n(M)\subset\ldots$ (*). Поскольку все формулы $\Phi_1(y),\Phi_2(y),\ \ldots\Phi_n(y),\ldots$ являются $\{a_1,a_2,b_1\}$-определимыми, т.е. не являются $\varnothing$-определимыми, то дальнейшие рассуждения, связанные с этими формулами, можем проводить в слабо о-минимальной структуре $\hat{M}_{a_1}$. Поймем вначале что $\Phi_1(M)\subset\Phi_2(M)$. По определению формулы $\Phi_1(y)$ имеем: $\sup\{f_{b_1}(a_2')\mid a_2'\in\neg\Phi_1(M)\cap U_2(M,a_1)\}=f_{a_1}(a_2)$. С другой стороны, так как существует $a_0\in\Phi_1(M)$ с условием $K_0(a_1,a_0,a_2)$, то имеем:

$$\sup\{f_{a_1}(a_2')\mid a_2'\in\neg\Phi_1(M)\cap U_2(M,a_1)\}<f_{a_1}(a_2)$$

Следовательно, существует $a_2''\in\neg\Phi_1(M)\cap U_2(M,a_1)$ такой что

$$\sup\{f_{a_1}(a_2')\mid a_2'\in\neg\Phi_1(M)\cap U_2(M,a_1)\}<f_{b_1}(a_2'')$$

Таким образом, получаем что $\Phi_1(M) \subset \Phi_2(M)$. Предположим теперь что для любого $i \le n$ $\Phi_{i-1}(M) \subset \Phi_i(M)$ и покажем что $\Phi_n(M) \subset \Phi_{n+1}(M)$. По определению формулы $\Phi_n(y)$ имеем:

$$\sup\{f_{b_1}(a_2') \mid a_2' \in \neg\Phi_n(M) \cap U_2(M, a_1)\} = \sup\{f_{a_1}(a_2'') \mid a_2'' \in \neg\Phi_{n-1}(M) \cap U_2(M, a_1)\}$$

Так как $\Phi_{n-1}(M) \subset \Phi_n(M)$, то

$$\sup\{f_{a_1}(a_2') \mid a_2' \in \neg\Phi_n(M) \cap U_2(M, a_1)\} < \sup\{f_{a_1}(a_2'') \mid a_2'' \in \neg\Phi_{n-1}(M) \cap U_2(M, a_1)\}$$

Следовательно, существует $a_2''' \in \neg\Phi_n(M) \cap U_2(M, a_1)$ такой что

$$\sup\{f_{a_1}(a_2') \mid a_2' \in \neg\Phi_n(M) \cap U_2(M, a_1)\} \le f_{b_1}(a_2''')$$

Таким образом, получаем что $\Phi_n(M) \subset \Phi_{n+1}(M)$. Мы доказали (*), откуда получаем противоречие со счетной категоричностью теории $Th(M)$.

Случай 2. $f_{a_1}(y)$ – монотонная вправо на U_2, $g_{a_2}(x)$ – монотонная влево на U_1.

Рассматривая те же самые формулы, как в случае 1, будем иметь:

$$\Phi_1(M) \supset \Phi_2(M) \supset \ldots \supset \Phi_n(M) \supset \ldots$$

Опять получаем противоречие со счетной категоричностью теории $Th(M)$. Шаг $s = 3$ доказан.

Доказательство Теоремы 2.1. В силу Предложения 2.4 каждая выпуклая компонента типа p является неразличимым множеством над $\varnothing$.

Предположим вначале, что $p(M)$ неразличимо над $\varnothing$. Допустим противное: существует две выпуклые компоненты U_i и U_j типа p такие, что $\{U_i, U_j\}$ не является слабо ортогональным над $\varnothing$. Тогда существуют кортежи $\langle a_1, a_2\rangle, \langle b_1, b_2\rangle \in U_i \times U_j$ такие, что $tp(\langle a_1, a_2\rangle / \varnothing) \ne tp(\langle b_1, b_2\rangle / \varnothing)$. Последнее влечет, что $p(M)$ не является 2-неразличимым над $\varnothing$, противореча нашему предположению.

Предположим теперь, что семейство всех выпуклых компонент $\{U_1, \ldots, U_m\}$ типа p попарно слабо ортогонально над $\varnothing$. В силу Предложения 2.6 $\{U_1, \ldots, U_m\}$ слабо ортонально над $\varnothing$, и в силу Предложения 2.7 оно ортогонально над $\varnothing$, откуда следует неразличимость $p(M)$ над $\varnothing$.

Список использованной литературы:

1 Bhattacharjee M., Macpherson H.D., Moller R.G., Neumann P.M. Notes on Infinite Permutation Groups / Lecture Notes in Mathematics 1698. – Springer, 1998. – 202 pages.

2 Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D. Minimality conditions on circularly ordered structures / Mathematical Logic Quarterly, 2005. – Vol. 51. – P. 377-399.

3 Macpherson H.D., Steinhorn Ch. On variants of o-minimality / Annals of Pure and Applied Logic, 1996. – Vol. 79. – P. 165-209.

4 Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories / Mathematical Logic in Asia: Proceedings of the 9th Asian Logic Conference. – Singapore: World Scientific, 2006. – P. 31-40.

5 Алтаева А.Б., Кулпешов Б.Ш. Эквивалентность-генерирующие формулы в слабо циклически минимальных структурах / Доклады НАН РК, 2014. – № 2. – С. 5-10.

6. Кулпешов Б.Ш. Бинарность $\aleph_0$-категоричных слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 1 / Сибирские электронные математические известия, 2006. – Том 3. – С. 185-196.

Кулпешов Б.Ш.
ҚР ҰҒА мүшесі, Халықаралық ақпараттық технологиялар университетінің профессоры, Алматы, Қазақстан
Алтаева А.В.
ҚР БҒМ ҒК Ақпарат және есептеуіш технологиялар институты, Алматы, Қазақстан

ӘЛСІЗ МИНИМАЛЬДЫ ЦИКЛДЫ ШАРТТЫ ЦИКЛДЫ РЕТТЕЛГЕН ҚҰРЫЛЫМДАР

Андатпа: Мақалада әлсіз минимальды циклды шартты циклды реттелген құрылымдар зерттеледі. Жұмыста алгебралық емес 1 типті ақырлы категроиялық әлсіз циклді құрылымдардың жиындарының ажырамайтындылық шарттарының іске асырылуның қажетті және жеткілікті шарттары табылды. 1-транзитивті нашар пайдаланылады ең төменгі құрылымдары келтіріледі әр түрлі теоремалар және осы мәселе бойынша нұсқауары берілген.

Кілт сөздер: циклды реттелген жүйелер, жиындардың ажырамайтындығы, әлсіз минимальды циклды құрылымдар

Kulpeshov B.Sh.
Corresponding Member of NAS RK, professor of the International University of Information Technologies, Almaty, Kazakhstan
Altaeva AB
Institute of Information and computing technologies SC MES RK,Almaty, Kazakhstan

QUESTIONS ON ORTHOGONALITY AND INDISTINGUISHABLITY IN WEAKLY CIRCULARLY MINIMAL STRUCTURES

Abstract: In the present work cyclically ordered structures with minimal condition of weak cyclicals are being researched. Necessary and sufficient conditions for indistinguishability of multitude realizations of nonalgebraic 1-type countable categorical weakly circularly minimal structures were found.

This article is directed to review the concept of weakly circularly minimality, introduced and initially studied thoroughly, to questions in indistinguishability of multitude in weakly circularly minimal structures. In the work, it is given in terms of weak orthogonality convex components nonalgebraic 1-type test indistinguishability of multitude realizations of this type are for countable categorical not 1-transitive weakly circularly minimal structures, various theories and options for their solutions are given on the issue.

Keywords: cyclic ordered system, indistinguishability of multitude, weakly circularly minimal structures.