МРНТИ 27.17

Н.Р. Юничева[1]
[1]Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК
г. Алматы, Казахстан

ФОРМАЛИЗМ АРИФМЕТИКИ КАУХЕРА В ЗАДАЧЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С НЕТОЧНЫМИ ДАННЫМИ

Аннотация. Актуальной проблемой, заслуживающей внимания в современной теории управления, на сегодняшний день является проблема управления не полностью определенными объектами. Не полностью известный объект или объект в условиях ограниченной неопределенности можно рассматривать как семейство объектов, которое определяется принадлежностью параметров или характеристик этого объекта заданным множествам. В данной статье предлагается процедура решения задачи параметрического синтеза управления интервально-заданными объектами с использованием формализма арифметики Каухера [1], которая представляет собой нетривиально устроенную алгебраическую систему и метод общего параметра.

Ключевые слова: объекты с неточными данными, интервальный анализ, параметрический синтез.

***

Аңдатпа. Қазіргі заманғы басқару теориясына назар аударуға лайық өзекті проблема болып, толық емес негізгі нысандарды басқару проблемасы болып табылады.

Толығымен белгісіз немесе төмендетілген белгісіздік нысанды, қосалқы жинақтарын көрсету үшін объектінің параметрлерін немесе сипаттамаларын анықталатын нысанды отбасы деп қарастыруға болады.

Мақалада Каухер арифметикасының формальдануын пайдаланып интервальды берілген объектілерді басқаруды параметрлік синтездеу есебін шешуде анық емес алгебралық жүйе және жалпы параметр әдісі түрінде берілген процедурасы ұсынылған.

Кілт сөздер: дәлсіз деректі объектілер, интервальды талдау, параметрлік синтездеу.

***

Abstract. One of the real nowadays problems, which deserves attention in contemporary control theory, is a control of non-completely determined object. A non-completely known object or an object in conditions with restricted underminity can be considered as a family of objects, which determines by belonging of some parameters or charactericstics of this object to a given set. In this article we proposes a procedure for solving the problem

of parametric synthesis of control by interval-given objects using the Kauher arithmetic formalism [1], which is a non-trivially arranged algebraic system, and the method of the general parameter.

Key words: objects with inaccurate data, interval analysis, parametric synthesis.

Объект управления называется интервально-заданным, если заданное множество является множеством вещественных интервалов. Следовательно, возникает задача управления не единственным объектом, а семейством или множеством объектов. Для решения задач анализа динамических свойств и синтеза управления подобным классом объектов применяется аппарат интервального анализа. Основополагающие результаты интервального анализа были получены в работах R. Moore, Ю.И. Шокина, Г. Алефельда, С.П. Шарого. Разработка интервальных методов и их приложений для решения задач исследования динамических свойств и параметрического синтеза систем управления интервально-заданными объектами находится на начальном этапе. Некоторые аспекты разработки интервальных методов с учетом математических особенностей интервального пространства предложены в работах В. М. Кунцевича, Н.А. Хлебалина, Е.М. Смагиной, И.В. Дугаровой и др.

Пусть математическая модель сложного интервального объекта управления представляется следующим образом:

$$\dot{X}(t) = [A]X(t) + [B]U(t), t \ge t_0, \tag{1}$$

где $X(t) \in R^n$ - вектор состояний системы; $U(t) \in R^1$ - скалярное управление; $[A] \in M_{n,n}(I(R))$ - вещественная интервальная матрица объекта управления, $[A] = \left\{ [a_{ij}],\ i, j = \overline{1,n} \right\}$, $[a_{ij}] = [\underline{a_{ij}}; \overline{a_{ij}}]$, $i, j = \overline{1,n}$; $[B] \in M_{n,1}(I(R))$ - интервальный вектор объекта управления, $[B] = \left\{ [b_j], j = \overline{1,n} \right\}$, , $b_j = [\underline{b_j}; \overline{b_j}]$, $j = \overline{1,n}$; $M_{n,n}(I(R)),\ M_{n,1}(I(R))$ - соответственно множества матриц и векторов: $[\underline{a}, \overline{a}] \overset{\Delta}{=} \{ a \in R \wedge \underline{a} \le a \le \overline{a} \}$; $I(R)$ - множества вещественных интервалов; $\underline{a_{ij}}, \underline{b_j}$, $\overline{a_{ij}}$, $\overline{b_j}$ - нижние и верхние границы значений элементов $[A]$ и $[B]$.

Управление $U(t) = U(t, X(t))$ в (1) выбирается таким образом, чтобы обеспечить желаемую динамику в замкнутой системе управления (ЗСУ):

$$\dot{X}(t) = [D]X(t), \tag{2}$$

где $[D]=\left\{\left[d_{ij}\right],\ i,j=\overline{1,n}\right\},\ \ [d_{ij}]=[\underline{d_{ij}};\overline{d_{ij}}],\ \ i,j=\overline{1,n}$ - интервальная матрица замкнутой системы управления.

Под характеристическим полиномом ЗСУ для интервальной матрицы $[D]$ будем понимать естественное интервальное расширение /1/ $\det(\lambda E-D),\ D\in[D]$ вида:

$$[d(\lambda)]=\det(\lambda E-[D])=\lambda^n+[d_1]\lambda^{n-1}+[d_2]\lambda^{n-2}+\cdots+[d_n], \tag{3}$$

где $[d_i]=[\underline{d_i},\overline{d_i}],\ i=\overline{1,n}$ - интервальные коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы управления.

Ниже представлена процедура отыскания алгебраического интервального решения интервальной системы алгебраических уравнений, к которым сводится сформулированная задача параметрического синтеза.

Выберем управляющее воздействие $U(t)=U(t,X(t))$ в виде:

$$U(t)=([K_0]+[\beta]\cdot I_n)^T X(t), \tag{4}$$

где $[K_0]\in M_{n,1}(I(R))$ - вектор номинальных настраиваемых параметров, $[\beta]\in I(R)$ - интервальный аддитивный общий параметр, I_n - единичный вектор размерности $(n\times 1)$.

При выбранном алгоритме управления требуется определить параметры $[K_0]\text{and}[\beta]$ таким образом, чтобы в ЗСУ обеспечивались наперед заданные динамические свойства, определенные желаемым интервальным характеристическим полиномом.

Интервальные характеристические полиномы замкнутой и разомкнутой системы управления соответственно имеют нижеследующий вид:

$$\det\begin{pmatrix}\lambda E-[A] & [B]\\ [K_0]+[\beta]I_n & 1\end{pmatrix}==(-1)^{n+2}\det[N_1(\lambda)]([k_{01}]+[\beta])+(-1)^{n+3}\det[N_2(\lambda)]([k_{02}]+[\beta])+\cdots$$
$$+\cdots+(-1)^{2n+1}\det[N_n(\lambda)]([k_{0n}]+[\beta])+\cdots++\det(\lambda E-(A)) \tag{5}$$

и $[l(\lambda)]=\det(\lambda E-[A])=\lambda^n+[l_1]\lambda^{n-1}+[l_2]\lambda^{n-2}+\cdots+[l_n],$ (6)

где $[l_i]=[\underline{l_i},\overline{l_i}],i=\overline{1,n}$ - интервальные коэффициенты характеристического полинома разомкнутой системы управления.

Для решения задачи параметрического синтеза требуется получить решение следующей системы интервальных алгебраических уравнений:

$$[P]([K_0]+[\beta]\cdot I_n)+[l]=[d], \tag{7}$$

где $[P]$ - интервальная матрица размерности $(n \times n)$;$[l]$ -интервальный вектор, составленный из коэффициентов $[l_i],\ i = \overline{1,n}$ из (6); $[d]$ - интервальный вектор, составленный из коэффициентов $[d_i],\ i = \overline{1,n}$ из (3).

Решение будем искать в классе алгебраических интервальных решений. Под алгебраическим интервальным решением понимается такой интервальный вектор $([K_0] + [\beta] \cdot I_n)$, что подстановка его в систему интервальных алгебраических уравнений

$$[P]([K_0] + [\beta] \cdot I_n) = [H], \tag{8}$$

и выполнение всех интервальных арифметических операций приводят к верному равенству.

Сформируем функцию:

$$\varphi([K_0],[\beta]) = [P]([K_0] + [\beta] I_n) \Theta [H] \subseteq ([P][K_0] + [P][\beta] I_n) \Theta [H], \tag{9}$$

где отображение $\varphi: IR^n \to IR^n$.

Задача построения алгебраического решения системы вида (8) в интервальном пространстве IR^n состоит в определении нулей отображения $\varphi: ([\mathrm{K}_0],[\beta])$, представленного выражением (9).

Используя погружение [1] $\sigma: IR^n \to R^{2n}$, задачу отыскания нулей отображения $\varphi: IR^n \to IR^n$ заменяем на задачу решения следующего уравнения в R^{2n}:

$$\Phi(K_0, \beta) = \sigma(\varphi([K_0],[\beta])) = \sigma([P][K_0] + [P][\beta] I_n \Theta [H]) = 0 \tag{10}$$

где $\Phi = \sigma \circ \varphi \circ \sigma^{-1}: R^{2n} \to R^{2n}$.

Рассмотрим процедуру определения параметров: $\sigma([K_0]) \in R^{2n}$ и общего аддитивного параметра $\sigma([\beta]) \in R^{2n}$.

Вектор $\sigma([K_0]) \in R^{2n}$ определяется как решение номинальной системы:

$\sigma(mid[P]) K_0 = \sigma([H]), \beta = 0$, при (11).

Вектор K_0 используется при определении аддитивного общего параметра $\sigma([\beta]) \in R^{2n}$ по итеративной схеме. При ее формировании используются следующие операции:

если $\{P_i \mid i \in [1,n]\}$ - ограниченное семейство «расширенных интервалов», то

$$\bigvee_{i \in [1,n]} [P_i] = \sup_{\subseteq} \{[P_i] \mid i \in [1,n]\} [\inf_{\leq} \{\underline{P_i} \mid i \in [1,n]\}], [\sup_{\leq} \{\overline{P_i}\}], i \in [1,n], \tag{12}$$

$$\underset{i\in[1,n]}{\wedge}[P_i] = \inf_{\subseteq}\{[P_i] \mid i\in[1,n]\}[\sup_{\leq}\{\underline{P_i} \mid i\in[1,n]\}], \quad [\inf_{\leq}\{\overline{P_i}\}], i\in[1,n], \quad (13)$$

Используя (12),(13) в выражении (10) может быть выделена мажорирующая компонента:

$$\Phi^*(\beta) = \sigma\left(\sum_{j=1}^{n}\begin{pmatrix}\left(\left(\underset{i=\overline{1,n}}{\vee}[p_{ij}]\right)[k_{0j}]\right)\Theta \underset{i=\overline{1,n}}{\wedge}[h_i] + \\ +\sigma\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\underset{i=\overline{1,n}}{\vee}[p_{ij}]\right)[\beta]\right)\end{pmatrix}\right) = 0, \quad (14)$$

Итеративная процедура определения аддитивного общего параметра β представляется в следующем виде:

если m-ое приближение $\beta^{(m)}$, $m = 0,1,2,\ldots$, известно, то

$$\beta^{(m+1)} = \beta^{(m)} - \left(S^{(m)}\right)^{-1}\left(\Phi\left(\beta^{(m)}\right)\right), \quad (15)$$

где матрица $S^{(m)} \in \partial\Phi\left(\beta^{(m)}\right)$ и имеет следующие оценки сверху и снизу:

$$\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}\left\langle \underset{i=\overline{1,n}}{\vee}[p_{ij}]\right\rangle & \sum_{j=1}^{n}\left\langle \underset{i=\overline{1,n}}{\vee}[p_{ij}]\right\rangle \\ \sum_{j=1}^{n}\left\langle \underset{i=\overline{1,n}}{\vee}[p_{ij}]\right\rangle & \sum_{j=1}^{n}\left\langle \underset{i=\overline{1,n}}{\vee}[p_{ij}]\right\rangle\end{pmatrix} \leq \mathrm{S}^{(\mathrm{m})} \leq \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}\left| \underset{i=\overline{1,n}}{\vee}[p_{ij}]\right| & \sum_{j=1}^{n}\left| \underset{i=\overline{1,n}}{\vee}[p_{ij}]\right| \\ \sum_{j=1}^{n}\left| \underset{i=\overline{1,n}}{\vee}[p_{ij}]\right| & \sum_{j=1}^{n}\left| \underset{i=\overline{1,n}}{\vee}[p_{ij}]\right|\end{pmatrix}, \quad (16)$$

где операции $|\bullet|$, $\langle\bullet\rangle$ понимаются в следующем смысле:

$$\langle[x]\rangle = \begin{cases}\min\left\{\left|\overline{x}\right|,\left|\underline{x}\right|\right\}, & \text{если } 0 \notin [x] \\ 0, & \textit{если } 0 \in [x]\end{cases} \quad (17)$$

$$|[x]| = \max\left\{\left|\overline{x}\right|,\left|\underline{x}\right|\right\} \text{ - начальное значение } [\mathrm{x}] \quad (18)$$

Сходимость алгоритма (16) обеспечивается условиями следующей теоремы:

Теорема 1. Если собственная интервальная матрица $[P]$ достаточно узка и все точечные матрицы размерности $R^{2n\times 2n}$, удовлетворяющие следующему соотношению:

$$\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}\left\langle \underset{i=\overline{1,n}}{\vee}[p_{ij}]\right\rangle & \sum_{j=1}^{n}\left\langle \underset{i=\overline{1,n}}{\vee}[p_{ij}]\right\rangle \\ \sum_{j=1}^{n}\left\langle \underset{i=\overline{1,n}}{\vee}[p_{ij}]\right\rangle & \sum_{j=1}^{n}\left\langle \underset{i=\overline{1,n}}{\vee}[p_{ij}]\right\rangle\end{pmatrix} \leq S \leq \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}\left| \underset{i=\overline{1,n}}{\vee}[p_{ij}]\right| & \sum_{j=1}^{n}\left| \underset{i=\overline{1,n}}{\vee}[p_{ij}]\right| \\ \sum_{j=1}^{n}\left| \underset{i=\overline{1,n}}{\vee}[p_{ij}]\right| & \sum_{j=1}^{n}\left| \underset{i=\overline{1,n}}{\vee}[p_{ij}]\right|\end{pmatrix} \quad (19)$$

являются невырожденными, то алгоритм (15) сходится к $\sigma\left(\left[K_0\right]+\left[\beta\right]I_n\right)$, где $\left(\left[K_0\right]+\left[\beta\right]I_n\right)_A$ - алгебраическое решение интервальной системы (8).

Доказательство теоремы получено по схеме, предложенной в [7].

Заключение

В статье предложен алгоритм решения задачи параметрического синтеза управления сложными объектами, функционирующими в условиях неопределенности на основе применения некоторых понятий и свойств расширенной арифметики Каухера и метода общего параметра. Показана эффективность предложенного подхода в решении задачи параметрического синтеза подобным классом объектов.

Список использованной литературы:

1 Kaucher E.R. Interval analysis in the extended interval space IR // Computing Suppl. 2. – 1991. – P. 33-49

2 Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. – 293 с.

3 Шарый С.П. Линейные статические системы с интервальной неопределенностью: эффективние алгоритмы для решения задач управления и стабилизации // Вычислительные технологии, 1995. – Т. 4. – С. 331-356

4 Shary S.P. Solving the tolerance problem for intervallinear equations // Interval Computations. – 1994. – № 1. – P. 4-22

5 Акилов Г.П., Кутателадзе С.С. Упорядоченные векторные пространства / Г.П. Акилов, С.С. Кутателадзе. – Новосибирск: Наука, 1978. – 370 с.

6 Ашимов А.А., Сыздыков Д.Ж. Идентификация методом общего параметра: Справочник по теории автоматического управления / Под ред. КрасовскогоА.А. – М.: Наука, 1987. – С. 263-271

7 Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ / Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтер. – М.: Институт компьютерных исследований, 2007. – 467 с.