Дауылбаев М.К.,

доктор физико-математических наук, профессор

Казахский национальный университет им. Аль-Фараби

Асимптотическое поведение решений краевой задачи для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений

Уравнения с малым параметром при старшей производной в настоящее время называются сингулярно возмущенными уравнениями. Интерес к сингулярно возмущенным уравнениям объясняется большой прикладной значимостью этих уравнений. Они выступают в качестве математических моделей при исследовании разнообразных процессов в физике, химии, биологии и технике. Например, распространение тепла в тонких телах (примерами тонких тел являются тонкий стержень и тонкая пластинка, отношение толщины стержня к его длине является малым параметром), в теории полупроводниковых приборов (в этом случае, отношение диэлектрической проницаемости к заряду электрона является малым параметром), в процессе горения в случае автокаталитической реакции (отношение произведения удельной теплоемкости на коэффициент теплопроводности к тепловому эффекту реакции является малым параметром), в среде с малой вязкостью и в других различных физических, химических и технических процессах. Сингулярно возмущенные уравнения имеют медленные и быстрые переменные, роль которых обычно выполняют искомая функция и её первая производная. Решение сингулярно возмущенного уравнения имеет область быстрого изменения функции, которая располагается, как правило, в окрестности одной (либо двух) граничных точек задачи. Такая область быстрого изменения функции называется областью математического пограничного слоя. Расположение математического пограничного слоя совпадает с гидродинамическим пограничным слоем. Толщина пограничного слоя зависит от величины малого параметра, и при уменьшении малого параметра уменьшается и толщина пограничного слоя. Настоящая работа посвящена исследованию качественного поведения решений краевой задачи для сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения, обладающего явлением начального скачка.

Рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнение третьего порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A_0(t) y'' + A_1(t) y' + A_2(t) y = F(t) + \\ + \int_0^1 [H_0(t,x) y(x,\varepsilon) + H_1(t,x) y'(x,\varepsilon)] dx \end{aligned} \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$l_1 y(t) \equiv y(0,\varepsilon) = \alpha, \quad l_2 y(t) \equiv y'(0,\varepsilon) = \beta, \quad l_3 y(t) \equiv y(1,\varepsilon) = \gamma, \tag{2}$$

где α, β, γ – некоторые известные постоянные.

Предположим, что выполнены следующие условия:

I. Функции $A_i(t), F(t), i=\overline{0,2}$ являются достаточно гладкими на отрезке $[0,1]$, а $H_i(t,x), i=0,1$ - в области $D=(0\le t\le 1, 0\le x\le 1)$.

II. Функции $A_0(t)$ и $A_1(t)$ удовлетворяют условиям:

$$A_0(t)\ge\gamma\equiv const>0,\quad A_1(t)\ne 0,\quad 0\le t\le 1.$$

III. Функции $\overline{\mu}_1(t)$ и $\overline{\mu}_2(t)$, являющиеся действительными корнями уравнения $\mu^2(t)+A_0(t)\mu(t)+A_1(t)=0$, удовлетворяют условиям:

$$\overline{\mu}_1(t)\ne\overline{\mu}_2(t),\quad \overline{\mu}_i(t)\le-\gamma<0,\quad i=1,2,\quad 0\le t\le 1$$

IV. Число 1 не является собственным числом ядра

$$H(t,s,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^1[H_0(t,x)K(x,s,\varepsilon)+H_1(t,x)K'(x,s,\varepsilon)]dx,$$

где $K(t,s,\varepsilon)$ - функция Коши: $L_\varepsilon K(t,s,\varepsilon)=0,\ K(s,s,\varepsilon)=0,\ K'(s,s,\varepsilon)=0,\ K''(s,s,\varepsilon)=1$

V. Справедливо неравенство:

$$\omega(\varepsilon)=\begin{vmatrix} Q_1(0,\varepsilon) & Q_2(0,\varepsilon) & Q_3(0,\varepsilon)\\ Q_1'(0,\varepsilon) & Q_2'(0,\varepsilon) & Q_3'(0,\varepsilon)\\ Q_1(1,\varepsilon) & Q_2(1,\varepsilon) & Q_3(1,\varepsilon)\end{vmatrix}\ne 0$$

Лемма 1. Если справедливы условия I - III, то фундаментальная система решений уравнения $L_\varepsilon y(t,\varepsilon)=0$ на отрезке $[0,1]$ существует и выражается формулами:

$$y_i(t,\varepsilon)=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\overline{\mu}_i(x)dx}\cdot[y_{i0}(t)+O(\varepsilon)],\ i=1,2,$$

$$y_3(t,\varepsilon)=[y_{30}(t)+O(\varepsilon)],$$

где $y_{30}(t)$ является решением задачи $A_1(t)y'+A_2(t)y=0, y(0)=1$, а $y_{i0}(t), i=1,2$ - решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$(3\overline{\mu}_i^2 + 2A_0(t)\overline{\mu}_i + A_1(t))y_{i0}'(t) + (3\overline{\mu}_i\overline{\mu}_i' + A_0(t)\overline{\mu}_i' + A_2(t))y_{i0}(t) = 0,\ i = 1,2$$

с начальными условиями: $y_{i0}(0) = 1$, $i = 1,2$.

Рассмотрим однородное интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} L_\varepsilon\Psi_i(t,\varepsilon) &\equiv \varepsilon^2\Psi_i''' + \varepsilon A_0(t)\Psi_i'' + A_1(t)\Psi_i' + A_2(t)\Psi_i = \\ &= \int_0^1 [H_0(t,x)\Psi_i(x,\varepsilon) + H_1(t,x)\Psi_i'(x,\varepsilon)]dx, \quad i = \overline{1,3} \end{aligned} \tag{3}$$

с краевыми условиями

$$l_k\Psi_i(t,\varepsilon) = \delta_{ki}, k = \overline{1,3}. \tag{4}$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия I-V. Тогда для решения задачи (3), (4) справедлива формула:

$$\Psi_i(t,\varepsilon) = \frac{\omega_i(t,\varepsilon)}{\omega(\varepsilon)}, \quad i = \overline{1,3}, \tag{5}$$

где $\omega(\varepsilon)$ - определитель из условия V, $\omega_i(t,\varepsilon)$ - определитель, получаемый из $\omega(\varepsilon)$ заменой его i – ой строки строкой из $Q_i(t,\varepsilon), i = \overline{1,3}$:

$$Q_i(t,\varepsilon) = \Phi_i(t,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t K(t,s,\varepsilon)(\varphi_i(s,\varepsilon) + \int_0^1 R(s,p,\varepsilon)\varphi_i(p,\varepsilon)dp)ds,$$

$$\varphi_i(t,\varepsilon) = \int_0^1 [H_0(t,x)\Phi_i(x,\varepsilon) + H_1(t,x)\Phi_i'(x,\varepsilon)]dx, \quad i = \overline{1,3},$$

$\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,3}$ - решение краевой задачи: $L_\varepsilon\Phi_i(t,\varepsilon) = 0$, $l_k\Phi_i(t,\varepsilon) = \delta_{ki}$, $i,k = \overline{1,3}$, а $R(t,s,\varepsilon)$ – резольвента ядра $H(t,s,\varepsilon)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия I-V. Тогда решение задачи (1), (2) на отрезке $[0,1]$ существует, единственно и выражается формулой:

$$\begin{aligned} y(t,\varepsilon) &= (\alpha - P(0,\varepsilon))\Psi_1(t,\varepsilon) + (\beta - P'(0,\varepsilon))\Psi_2(t,\varepsilon) + \\ &\quad + (\gamma - P(1,\varepsilon))\Psi_3(t,\varepsilon) + P(t,\varepsilon), \end{aligned}$$

где $\Psi_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,3}$ - решение задачи (3), (4), выражаемое формулой (5), а $P(t,\varepsilon)$ имеет вид:

$$P(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t K(t,s,\varepsilon)(F(s)+\int_0^1 R(s,p,\varepsilon)F(p)dp)ds$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия I-V. Тогда для решения задачи (1), (2) при достаточно малых ε справедливы следующие асимптотические оценки:

$$|y(t,\varepsilon)|\le C\Bigg[|\alpha|(\max_{0\le t\le 1}|H_1(t,0)|+e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}})+|\beta|(\varepsilon^2+\varepsilon\cdot e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}})+$$

$$+(|\gamma|+\max_{0\le t\le 1}|F(t)|)(1+e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}})\Bigg],$$

$$|y'(t,\varepsilon)|\le \frac{C}{\varepsilon}\Bigg[|\alpha|(\varepsilon\max_{0\le t\le 1}|H_1(t,0)|+e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}})+|\beta|(\varepsilon^3+\varepsilon\cdot e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}})+$$

$$+(|\gamma|+\max_{0\le t\le 1}|F(t)|)(\varepsilon+e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}})\Bigg],$$

$$|y''(t,\varepsilon)|\le \frac{C}{\varepsilon^2}\Bigg[|\alpha|(\varepsilon^2\max_{0\le t\le 1}|H_1(t,0)|+e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}})+|\beta|(\varepsilon^4+\varepsilon\cdot e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}})+$$

$$+(|\gamma|+\max_{0\le t\le 1}|F(t)|)(\varepsilon^2+e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}})\Bigg],$$

где $C>0$ и $\gamma>0-$ постоянные, не зависящие от ε.

Определение. Будем говорить, что решение $y(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной краевой задачи (1), (2) в точке $t=0$ обладает явлением *начального скачка нулевого порядка второй степени*, если решение $y(t,\varepsilon)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $y(0,\varepsilon)=\alpha\ne\bar{y}(0)$ при $\varepsilon\to 0$

2. Значение $y'(0,\varepsilon)$ ограничено при $\varepsilon\to 0$, а значение $y''(0,\varepsilon)$ неограниченно растет порядка $\frac{1}{\varepsilon^2}$ при $\varepsilon\to 0$, т.е.

$$y'(0,\varepsilon)=O(1),\qquad y''(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right),\quad \varepsilon\to 0.$$

Тогда из теоремы 2 следует, что решение $y(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной краевой задачи (1), (2) в точке $t=0$ отрезка $[0,1]$ обладает явлением начального скачка нулевого порядка второй степени.

Рассмотрим теперь измененное невозмущенное уравнение

$$L_0\bar{y}(t) \equiv A_1(t)\bar{y}' + A_2(t)\bar{y} = F(t) + \\ + \int_0^1 [H_0(t,x)\bar{y}(x) + H_1(t,x)\bar{y}'(x)]dx + \Delta(t) \tag{7}$$

с краевыми условиями

$$\bar{y}(0) = \alpha + \Delta_0, \quad \bar{y}(1) = \gamma, \tag{8}$$

где $\Delta(t)$ и Δ_0 называются соответственно начальными скачками интегрального члена и решения.

Теорема 3. Пусть выполнены условия I-V. Тогда при достаточно малых ε для разности $y(t,\varepsilon)-\bar{y}(t)$ между решением $y(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной краевой задачи (1), (2) и решением $\bar{y}(t)$ измененной невозмущенной задачи (7), (8) на отрезке $0\le t\le 1$ справедливы следующие оценки:

$$\left|y(t,\varepsilon)-\bar{y}(t)\right| \le C\left[\max_{0\le t\le 1}\left|\Delta(t)-\Delta_0 H_1(t,0)\right| + \varepsilon + e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}\right],$$

$$\left|y'(t,\varepsilon)-\bar{y}'(t)\right| \le \frac{C}{\varepsilon}\left[\varepsilon\max_{0\le t\le 1}\left|\Delta(t)-\Delta_0 H_1(t,0)\right| + \varepsilon^2 + e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}\right],$$

$$\left|y''(t,\varepsilon)-\bar{y}''(t)\right| \le \frac{C}{\varepsilon^2}\left[\varepsilon^2\max_{0\le t\le 1}\left|\Delta(t)-\Delta_0 H_1(t,0)\right| + \varepsilon^3 + e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}\right],$$

где $C>0$ и $\gamma>0$ – постоянные, не зависящие от ε.

Таким образом, из теоремы 3 непосредственно следует, что если $\Delta(t)=\Delta_0 H_1(t,0)$, то решение $y(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной краевой задачи (1), (2) при стремлении малого параметра ε к нулю стремится к решению $\bar{y}(t)$ измененной невозмущенной задачи (7), (8), т.е.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t), \quad \lim_{\varepsilon \to 0} y'(t,\varepsilon) = \bar{y}'(t), \quad \lim_{\varepsilon \to 0} y''(t,\varepsilon) = \bar{y}''(t), \quad 0 < t_0 \le t \le 1,$$

где t_0 – сколь угодно малое, но фиксированное при $\varepsilon \to 0$ число.

Resume

In this paper we investigate the qualitative behavior of solutions of boundary value problems for singularly perturbed integro-differential equation with initial jump phenomenon.

Түйін

Мақалада сингулярлы қоздырымды кіші параметрлі теңдеулердің шешу жолдары қарастырылған. Атап айтқанда, бастапқы секіріс құбылысы бар сингулярлы қоздырмалы интегралды-дифференциялды теңдеулер үшін шеткі есептің шешімінің сапалық тәртібі зерттейді.

Özet

Bu yazıda tek başına ilk atlama fenomeni ile integro diferansiyel denklem bozulursa için sınırdeğer problemlerinin çözümleri nitel davranışı araştırmak.